

01-09-2025

# WorldMathBook, Ejercicios

Español

Para secundaria y más

PÁGINAS DE PRUEBA

## Contenido:

Prefacio	6
<b>Parte 1. Conceptos básicos</b>	<b>8</b>
Sistema numérico	8
Las cuatro operaciones aritméticas básicas	11
• <i>Suma, Diferencia, Producto, División</i>	
Fracciones (cocientes)	19
Porcentaje	23
• <i>Punto porcentual</i>	
Cálculo con letras (álgebra)	26
Paréntesis	29
Reglas cuadradas (Identidades notables)	32
Raíz cuadrada	34
Exponenciación	36
Ecuaciones	42
Ecuaciones de segundo grado	50
Ecuaciones de grado superior	55
Dos ecuaciones con dos incógnitas	57
Funciones y proporcionalidad	60
Intervalos y desigualdades	61
Números imaginarios, brevemente	65

## **Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones**

	67
El sistema de coordenadas y la distancia	67
La línea recta	73

La parábola	82
Polinomios	90
Funciones y las cuatro operaciones aritméticas básicas	93
• <i>Funciones compuestas, funciones inversas</i>	
Los triángulos rectángulos	97
El círculo	101
Sinus (Seno), Cosinus (coseno) y tangente	104
Radianes	112
• <i>Ángulo, longitud de arco, levantamiento</i>	
La función sinus y la oscilación sinusoidal	117
Los triángulos no rectángulos (triángulos arbitrarios)	125
• <i>Prueba de la relación sinus y de las relaciones cosinus</i>	
Funciones exponenciales	130
Funciones logarítmicas (log y ln)	136
• <i>log 10-logaritmo, logaritmo natural: ln (log e)</i>	
Otras funciones	145
• <i>Hipérbola, Función polinómica de tercer grado, Función polinómica de cuarto grado, Función polinómica fraccionaria, Una función polinómica especial de tercer grado, Funciones parcialmente definidas</i>	

### Parte 3. Diferenciación e Integración

	151
Introducción	151
Cálculo diferencial	153
Pruebas de cálculo diferencial 1	157
• <i>La recta horizontal, La recta, La parábola, La función raíz cuadrada, Polinomios, La función exponencial natural, La función logaritmo natural</i>	
Notaciones	168

Diferenciación y las cuatro operaciones aritméticas básicas	169
• <i>Suma, Diferencia, Producto, División</i>	
Diferenciación de funciones compuestas	173
Pruebas de cálculo diferencial 2	176
• <i>La función <math>e^{kx}</math>, La función exponencial, La función sinus, La función cosinus, La función tangente</i>	
• <i>Encuesta</i>	
• <i>Diferenciable, no diferenciable</i>	
Cálculo integral	193
• <i>Encuesta</i>	
Notaciones	196
Integración y las cuatro operaciones aritméticas básicas	199
• <i>Suma, Diferencia, Producto</i>	
Integración por sustitución	201
Integración por partes	204
La integral específica	207
Áreas	211
Volúmenes	216
Las reglas de Guldin	221
Longitud de la curva	223
Ecuaciones diferenciales	225
• <i>Ecuaciones diferenciales típicas, La ecuación diferencial logística</i>	
Campos en pendiente	239
Funciones de dos variables	242
• <i>Modos de expresión, figuras 3D.</i>	
• <i>El gradiente</i>	

<b>Parte 4. Vectores</b>	249
Vectores 2D en el plano	249
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Conceptos básicos, Vectores especiales, Cálculos, Ángulo, Proyección, Determinante, Área y ángulo, La ecuación paramétrica de una línea recta, Distancia punto-línea</i></li> </ul>	
Coordenadas polares en 2D	271
Funciones vectoriales (curvas paramétricas) en 2D	272
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>La función vectorial para una línea recta, La función vectorial para un círculo, Diferenciación de funciones vectoriales: la línea, el círculo, Puntos dobles</i></li> </ul>	
Vectores 3D en el espacio	282
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Distancia punto-punto, Producto cruz, Ángulo entre vectores, Área, Ecuación de un plano, Distancia punto-plano, La línea recta en el espacio, Distancia entre líneas sesgadas, Distancia punto-línea, Distancia entre dos planos paralelos, Ángulo entre dos planos, ángulo entre línea y plano</i></li> </ul>	
La esfera	308
<b>Parte 5. Estadísticas</b>	310
Datos (Observaciones)	311
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Datos no agrupados</i></li> <li>• <i>Datos agrupados</i></li> <li>• <i>La distribución normal, varianza y desviación estándar.</i></li> <li>• <i>Bondad de ajuste (Chi elevado a dos - prueba)</i></li> </ul>	
Regresión	321
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Lineal</i></li> <li>• <i>Fuerza</i></li> <li>• <i>Exponencial</i></li> </ul>	
Probabilidad y combinación	324
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Introducción, Teoría, Ejemplos</i></li> </ul>	
Distribución binomial, muestra aleatoria e intervalo de confianza	
	332

- *Distribución binomial*
- *Muestra aleatoria e intervalo de confianza para una distribución binomial*
- *Notaciones y términos técnicos*

## **Números y resumen sobre la teoría de conjuntos** 343

- *Números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios.*
- *Números complejos, rectangulares, polares, exponenciales* 344
- *Números complejos, Resumen*
- *Teoría de conjuntos, brevemente* 357

## **Pruebas y cálculos raramente utilizados**

358

- *Prueba del teorema de Pitágoras*
- *Prueba de factorización de un polinomio de segundo grado*
- *División de polinomios*
- *Mostrar las fórmulas de permutación y combinación.*
- *Prueba de producto y división de números complejos en forma polar y exponencial.*

## **Índice de materias** 370

## **Prefacio, WorldMath – Español**

Las matemáticas son nuestra ciencia más exacta.

Las matemáticas son una ciencia hermosa.

Algunos estudian matemáticas solo, pero la mayoría de la gente las usa como herramienta para la física, la biología, la medicina, la ciencia de la ingeniería, la economía,....., para todo.

**Para secundaria y más.** Comenzamos con las cuatro operaciones aritméticas básicas y terminamos en el primer o segundo semestre del estudio para licenciatura o candidato.

El lenguaje es claro, la comprensión está enfocada, se explican los términos técnicos. También hay un cuaderno de ejercicios con problemas y propuestas de solución.

El libro fue traducido del inglés al español con la ayuda de un programa de traducción.

El libro es independiente de la colección de fórmulas que se utilice.

El libro también es independiente del uso de una calculadora o un programa de cálculo.

Y una cosa más. Las matemáticas no se vuelven más y más complicadas a medida que avanzamos. Esa es mi experiencia personal, y lo veo también con los estudiantes. El siguiente paso no es más difícil.

*Autor:* Tom Pedersen, ingeniero de procesamiento mecánico, Ph.D. de la Universidad Brunel. He trabajado en empresas como líder de proyectos y consultor, como investigador y como profesor en colegios técnicos en Elsinore y Copenhague, así como en la Universidad Técnica Danesa, donde trabajo actualmente. He dado conferencias dentro de varias materias, incluyendo una gran cantidad de matemáticas. He sido disertante en todos los temas presentados en este libro....¡Disfrútelo!

Tom Pedersen, septiembre de 2025.

## Por ciento

Porcentaje significa "de cien", lo que significa una fracción con 100 como denominador.

$\frac{1}{2}$  significa 1 de 2. Si multiplicamos por 50 en el numerador y denominador obtenemos  $\frac{50}{100}$  o 50 de 100 o 50%. En breve:

$$\frac{50}{100} = 50\%$$

### Ejemplos

$$\frac{1}{5} = \frac{20 \cdot 1}{20 \cdot 5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{1}{8} = \frac{12,5 \cdot 1}{12,5 \cdot 8} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

y como numero decimal

$$\frac{1}{2} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} = \frac{50}{100} = 50\% = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25 \cdot 1}{25 \cdot 4} = \frac{25}{100} = 25\% = 0,25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 4} = \frac{75}{100} = 75\% = 0,75$$

$$\frac{3}{8} = \frac{12,5 \cdot 3}{12,5 \cdot 8} = \frac{37,5}{100} = 37,5\% = 0,375$$

El porcentaje es de cien. Un número decimal está fuera de uno.

1 es un todo. 100% es también un todo.

$$1 = \frac{100}{100} = 100\%$$

2.

Ayer cierto vestido costó 200 libras. Hoy ha subido a 225 libras. ¿Cuál es el aumento en %?

200 libras corresponden al 100%.

La subida es  $225 - 200 = 25$  libras, que hay que ver en proporción con las 200 libras:

$$\frac{25}{200} = 0.125 = 12.5\% \quad \text{cual es la respuesta}$$

**3.**

Ayer cierto vestido costó 200 libras. Hoy el precio ha bajado a 175 libras. ¿Cuál es la reducción de precio en %?

200 libras corresponden al 100%.

La reducción es de  $200 - 175 = 25$  libras, que hay que ver en proporción a las 200 libras:

$$\frac{25}{200} = 0.125 = 12.5\% \quad \text{cual es la respuesta}$$

La información se podría dar como: Hoy -12,5% para este vestido.

**4.**

El precio de una determinada máquina es de 1000 libras sin IVA.

1000 libras corresponde al 100%. Incluido el 25% de IVA el precio es:

$$1.25 \cdot 1000 = 1250 \text{ libras} \quad \text{cual es la respuesta}$$

o

$$100\% + 25\% = 1000 + 0.25 \cdot 1000 = 1250 \text{ libras}$$

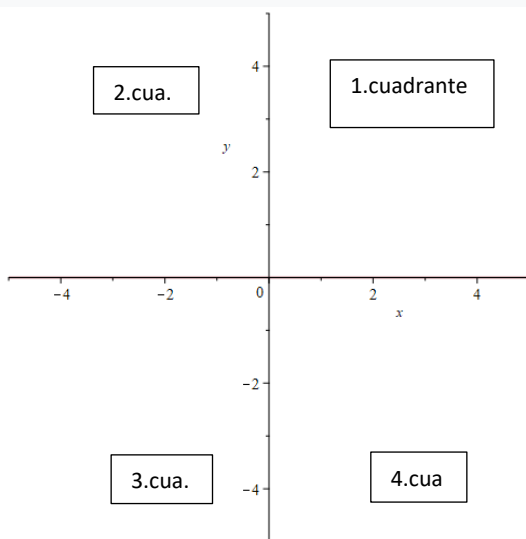
## Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones

### El sistema de coordenadas y la distancia.

Vivimos en un mundo de tres dimensiones, lo llamamos espacio y consta de largo, ancho y alto.

Si trabajamos en dos dimensiones, lo llamamos plano, y consta de dos direcciones, por ejemplo, horizontal y vertical. También podemos llamar a las direcciones para el eje. Luego tenemos *el primer eje* y *el segundo eje*; o en términos más técnicos: La *abscisa* y la *ordenada*, ambas del latín. Abscissa significa "fuera (ab) de aquí (cis)", que puede representarse parándose en el punto de partida y mirando horizontalmente al horizonte. La ordenada significa lo ordinario, que es vertical (todas las demás direcciones no serían ordinarias).

En matemáticas, a menudo usamos las palabras eje x y eje y,



pero pueden llamarse otras cosas. En física, el primer eje podría ser t para el tiempo y el segundo eje podría ser v para la velocidad (velox en latín). En economía el primer eje pueden ser meses y el segundo eje pueden ser costos. Etcétera.

El eje divide el plano en cuatro cuartos llamados los cuatro cuadrantes. El primer cuadrante es donde x e y son positivos (ambos son +). Luego giramos en sentido contrario a las agujas del reloj hasta el 2. 3. y 4. cuadrante.

Los ejes forman un ángulo recto y se cortan en un punto de partida común, denotado así:  $(x,y) = (0,0)$  . El punto de partida se llama Origo (griego antiguo) o simplemente O.

En el eje elegimos una escala adecuada para la tarea. Por lo general, elegimos la misma escala para los dos ejes, pero eso depende de lo que vayamos a graficar. Si las escalas son iguales, usamos el término técnico: equidistantes.

En total se le llama sistema de coordenadas (co(con) sistema de ordenadas(el ordinario)). Se está utilizando en todas partes.

Por ejemplo, el sistema de coordenadas se usa para mostrar cómo varía una función: la función de línea recta, la función de parábola, la función de sinus, etc.

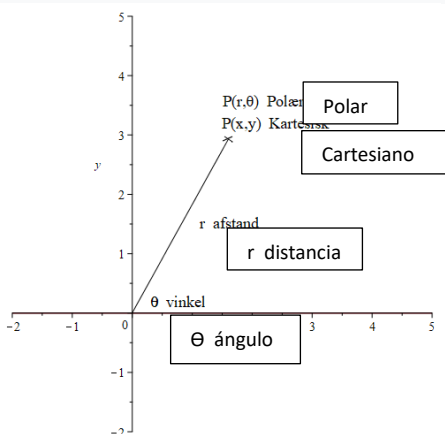
Consideramos  $x$  primero, y  $y$  como lo que sigue. Por lo tanto, los valores de  $x$  de una función también se denominan *dominio*, y los valores de  $y$  se denominan *rango* (a veces: la cantidad de valor). Las denotaciones no se usan comúnmente porque las palabras dominio y rango son lo suficientemente breves y muy informativas, pero si llamamos a la función,  $f$ , las denotaciones son: Dominio,  $D(f)$  - y Rango,  $G(f)$ . ( $R(f)$  para rango hubiera sido la opción lógica, pero  $R$  se usa para otra cosa).

-----

La demanda de una función es que para cada valor de  $x$  solo haya un valor de  $y$ . Por lo tanto, el flujo de una función en un sistema de coordenadas no puede ir y venir, ya que eso implicaría más valores de  $y$  para un valor de  $x$ . Si es necesario, hablamos de una función vectorial o una función de parámetro que se discutirá en la Parte 4.

El sistema de coordenadas rectangulares ordinario también se llama sistema de coordenadas cartesianas en honor al matemático Descartes.

Las coordenadas también se pueden indicar mediante coordenadas polares: (distancia desde Origo, ángulo con el eje  $+x$ ). Ver la figura:



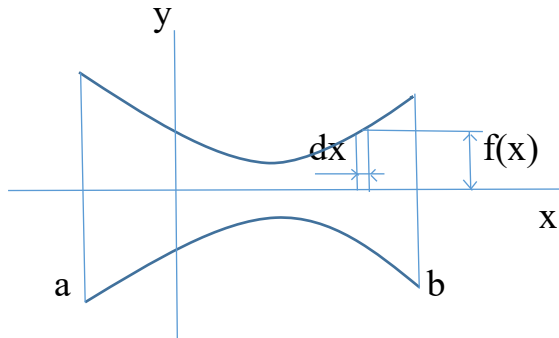
Consideraremos las coordenadas polares un poco más al final del libro.

Ahora se trata de coordenadas normales (cartesianas).

## Volúmenes

Podemos rotar un área 2D alrededor del eje x o y y tener un volumen 3D.

La fórmula para la rotación alrededor del eje x deriva



Si giramos nuestra tira infinitamente delgada alrededor del eje x tenemos un microcilindro. Un macrocilindro tiene el volumen

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l \quad l \text{ para longitud}$$

para nuestro microcilindro el volumen es

$$dV = \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$$

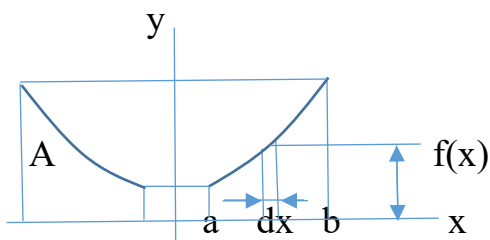
por integración (reuniendo todos los microcilindros) de a a b

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx \quad \text{el volumen de rotación alrededor del eje x}$$

Así, el volumen se puede calcular cuando tenemos una expresión de la función, que informa cómo varía el radio.

-----

La fórmula para la rotación alrededor del eje y deriva



Al girar nuestra tira infinitamente delgada alrededor del eje y, tenemos una carcasa de cilindro con volumen

$$dV = \text{altura} \cdot \text{circunferencia} \cdot \text{microespesor} \quad \Rightarrow$$

$$dV = f(x) \cdot 2\pi x \cdot dx \quad \Rightarrow$$

y cuando integramos (juntamos todas las carcasas de microcilindros) de  $a$  a  $b$ , el volumen, calculado numéricamente ( $x$  o  $f(x)$  puede ser negativo), es

$$V = \left| 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx \right| \quad \text{el volumen de rotación alrededor del eje } y$$

En la figura que se muestra, el volumen de rotación se parece al espacio debajo de las gradas de un estadio.

También podemos ver el volumen de rotación como el área  $A$  rotada alrededor del eje  $y$ .

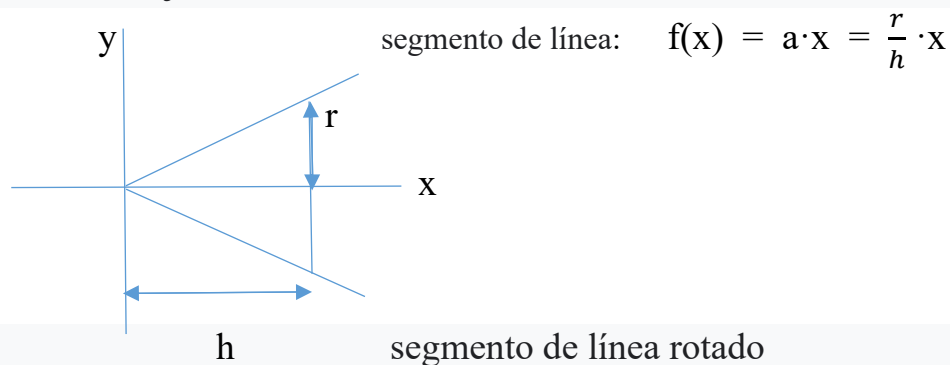
Si  $a = 0$  no habrá ningún agujero en el medio.

## Ejemplos

### 1.

Encontraremos la fórmula del volumen de un cono.

Giramos un segmento de línea una vez alrededor del eje  $x$  y tenemos un cono que yace hacia abajo.



$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx \quad \Rightarrow$$

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx \quad r \text{ y } h \text{ son constantes} \quad \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int_0^h x^2 dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \quad \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{h^3}{3} - 0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad \text{cual es la formula para el volumen de un cono}$$



01-09-2025

# WorldMathBook, Ejercicios

## Español

Para secundaria y más

PÁGINAS DE PRUEBA



## Contenido:

Prefacio 6

**Problemas 7 – 114**

**Soluciones 115 – 370**

---

### **Parte 1. Conceptos básicos - ejercicios**

***Sección A – problemas matemáticos tradicionales***      **7**

Las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Fracciones (cocientes)

Porcentaje y punto porcentual

Cálculo con letras (álgebra)

Paréntesis, reglas cuadradas y raíz cuadrada

exponenciación

Ecuaciones

Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de grado superior

Dos ecuaciones con dos incógnitas

Funciones y proporcionalidad

Intervalos y desigualdades

***Sección B – problemas de matemáticas aplicadas***      **27**

### **Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones - ejercicios**

***Sección A – problemas matemáticos tradicionales***      **31**

El sistema de coordenadas y la distancia.

la línea recta

la parábola

Polinomios

Funciones y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

- *Funciones compuestas, funciones inversas*

Los triángulos rectángulos

El círculo

Seno, coseno y tangente

Radián

- *Ángulo, longitud del arco*

La función seno (sinus) y la oscilación sinusoidal.

Los triángulos no rectángulos (triángulos arbitrarios)

Funciones exponenciales + Nota sobre funciones exponenciales en varias formas

Funciones logarítmicas (log y ln)

Otras funciones

***Sección B – problemas de matemáticas aplicadas***      **52**

## **Parte 3.**

### **Diferenciación e Integración - ejercicios**

***Sección A – problemas matemáticos tradicionales***      **60**

Calculo diferencial

Diferenciación y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Diferenciación de funciones compuestas.

Cálculo integral

Integración y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Integración por sustitución

Integración por partes

La integral específica

Áreas

Volúmenes

Las reglas de Guldin

Longitud de la curva

Ecuaciones diferenciales

- *Ecuaciones diferenciales típicas, La ecuación diferencial logística*

Campos de flujo

Funciones de dos variables.

- *El gradiente*

***Sección B – problemas de matemáticas aplicadas***      **82**

## **Parte 4. Vectores – ejercicios**

***Sección A – problemas matemáticos tradicionales***      **90**

Vectores 2D en el plano.

- *Conceptos básicos, Vectores especiales, Ángulo, Proyección, Determinante, Área y ángulo, Ecuación paramétrica de una recta, Distancia punto-línea*

Coordenadas polares en 2D

Funciones vectoriales (curvas paramétricas) en 2D

- *La función vectorial para una línea recta, La función vectorial para un círculo, Diferenciación de funciones vectoriales, Puntos dobles*

Vectores 3D en el espacio.

- *Distancia punto-punto, Producto cruz, Ángulo entre vectores, Área, Ecuación de un plano, Distancia punto-plano, La línea recta en el espacio, Distancia entre líneas sesgadas, Distancia punto-línea, Distancia entre dos planos paralelos, Ángulo entre dos planos, ángulo entre línea y plano*

La esfera

*Sección B – problemas de matemáticas aplicadas*     **107**

**Parte 5. Estadísticas - ejercicios**     **111**

Datos (Observaciones, distribución, desviación)

Regresión

**Números complejos**     **119**

**Parte 1.**

Sección A – soluciones propuestas 120

Sección B – soluciones propuestas 168

**Parte 2.**

Sección A – soluciones propuestas 174

Sección B – soluciones propuestas 231

**Parte 3.**

Sección A – soluciones propuestas 245

Sección B – soluciones propuestas 310

**Parte 4.**

Sección A: soluciones propuestas 325

[Cómo calcular el producto cruzado manualmente](#) 348

Sección B – soluciones propuestas 364

**Parte 5.** Soluciones propuestas 374

## **Prefacio, WorldMath – Español, ejercicios**

Este es el cuaderno de ejercicios de “WorldMath – Español”.  
Con preguntas y propuestas de respuestas.

**Para secundaria y más.** Comenzamos con las cuatro operaciones aritméticas básicas y terminamos en el primer o segundo semestre del estudio para licenciatura o candidato.

El libro fue traducido del inglés al español con la ayuda de un programa de traducción.

El libro es independiente de qué colección de fórmulas se utilice.

El libro también es independiente del uso de una calculadora o un programa de cálculo.

*Autor:* Tom Pedersen, ingeniero de procesamiento mecánico, Ph.D. de la Universidad Brunel. He trabajado en el ámbito empresarial como líder de proyectos y consultor, como investigador y como profesor en escuelas técnicas de Elsinore y Copenhague, así como en la Universidad Técnica Danesa, donde trabajo actualmente. He dado conferencias sobre varias materias, incluidas muchas matemáticas. He sido conferenciante en todos los temas presentados en este libro.....¡Disfruta!  
Tom Pedersen, enero de 2024.

## Problemas

### 4A.052

Encuentra tanto el ángulo agudo como el ángulo obtuso entre los planos

$$\alpha: 2x - 3y + z = 8 \qquad \beta: 2x + y - 4z = -8$$

### 4A.053

Encuentre la distancia desde el punto  $P(3, 7, 2)$  al plano

$$\alpha: 3(x - 1) + 2(y + 5) - 2(z - 2) = 0$$

### 2B.09

La Tierra tiene una circunferencia de 40.000 km de longitud y es casi esférica. Nos paramos en la playa con los ojos a 2 m sobre el nivel del mar y miramos hacia el horizonte. ¿A qué distancia está el horizonte?

¿A qué distancia podemos ver el horizonte si estamos a 40 m, 100 m, 1000 m sobre el mar?

## Soluciones propuestas

### 4A.052

El ángulo entre los planos es igual al ángulo entre sus vectores normales:

$$\mathbf{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{n}_1| = \sqrt{14} \quad \text{y} \quad |\mathbf{n}_2| = \sqrt{21}$$

$$\text{Fórmula} \quad \cos v = \frac{\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta}{|\mathbf{n}_\alpha| \cdot |\mathbf{n}_\beta|}$$

$$\text{Aquí} \quad \cos v = \frac{-3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow v \approx 100^\circ \quad \text{ángulo obtuso}$$

$$\text{y} \quad u \approx 180 - 100 \approx 80^\circ \quad \text{ángulo agudo}$$

### 4A.053

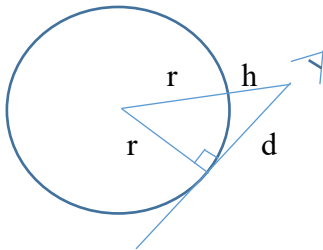
$$3x - 3 + 2y + 10 - 2z + 4 = 0 \quad \text{y punto } (3, 7, 2) \quad \Rightarrow$$

$$dist. = \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + (-2) \cdot 2 + 11|}{(9+4+4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{30}{\sqrt{17}} \approx 7.28$$

## 2B.09

Hallamos el radio de la Tierra a partir de:

$$O = 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{O}{2\pi} = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6378 \text{ km} \approx 6\,378\,000 \text{ m}$$



Pitágoras:

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$d^2 = (r + h)^2 - r^2$$

$h = 2 \text{ m}$ :

$$d^2 = 6\,378\,002^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 5051 \text{ m} \approx 5 \text{ km}$$

$h = 40 \text{ m}$ :

$$d^2 = 6\,378\,040^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 22\,589 \text{ m} \approx 23 \text{ km}$$

$h = 100 \text{ m}$ :

$$d^2 = 6\,378\,100^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 35\,716 \text{ m} \approx 36 \text{ km}$$

$h = 1000 \text{ m}$ :

$$d^2 = 6\,379\,000^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 112\,947 \text{ m} \approx 113 \text{ km}$$