26-05-2024

WorldMathBook, Ejercicios

Español

Para secundaria y más

Tom Pedersen, Compañia: WorldMathBook
cvr. 44731703 Dinamarca
ISBN 978-87-975307-3-3

Contenido:

Prefacio 6

Problemas 7 – 114

Soluciones 115 – 370

Parte 1. Conceptos básicos - ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales 7

Las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Fracciones (cocientes)

Porcentaje y punto porcentual

Cálculo con letras (álgebra)

Paréntesis, reglas cuadradas y raíz cuadrada

exponenciación

Ecuaciones

Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de grado superior

Dos ecuaciones con dos incógnitas

Funciones y proporcionalidad

Intervalos y desigualdades

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas 27

 ISBN 978-87-975307-3-3

Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones - ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales **31**

El sistema de coordenadas y la distancia.

la linea recta

la parábola

Polinomios

Funciones y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

- *Funciones compuestas, funciones inversas*

Los triángulos rectángulos

El círculo

Seno, coseno y tangente

Radián

- *Ángulo, longitud del arco*

La función seno (sinus) y la oscilación sinusoidal.

Los triángulos no rectángulos (triángulos arbitrarios)

Funciones exponenciales + Nota sobre funciones exponenciales en varias formas

Funciones logarítmicas (log y ln)

Otras funciones

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas **52**

Parte 3.
Diferenciación e Integración - ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales ***60***

Calculo diferencial

Diferenciación y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Diferenciación de funciones compuestas.

Cálculo integral

Integración y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Integración por sustitución

Integración por partes

La integral específica

Áreas

Volúmenes

Las reglas de Guldin

Longitud de la curva

Ecuaciones diferenciales

- *Ecuaciones diferenciales típicas, La ecuación diferencial logística*

Campos de flujo

Funciones de dos variables.

- *El gradiente*

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas ***82***

Parte 4. Vectores – ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales ***90***

Vectores 2D en el plano.

- *Conceptos básicos, Vectores especiales, Ángulo, Proyección, Determinante, Área y ángulo, Ecuación paramétrica de una recta, Distancia punto-línea*

Coordenadas polares en 2D

Funciones vectoriales (curvas paramétricas) en 2D

- *La función vectorial para una línea recta, La función vectorial para un círculo, Diferenciación de funciones vectoriales, Puntos dobles*

Vectores 3D en el espacio.

- *Distancia punto-punto, Producto cruz, Ángulo entre vectores, Área, Ecuación de un plano, Distancia punto-plano, La línea recta en el espacio, Distancia entre líneas sesgadas, Distancia punto-línea, Distancia entre dos planos paralelos, Ángulo entre dos planos, ángulo entre línea y plano*

La esfera

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas ***107***

Parte 5. Estadísticas - ejercicios 111

Datos (Observaciones, distribución, desviación)

Regresión

Números complejos 119

Parte 1.
Sección A – soluciones propuestas 120
Sección B – soluciones propuestas 168

Parte 2.
Sección A – soluciones propuestas 174
Sección B – soluciones propuestas 231

Parte 3.
Sección A – soluciones propuestas 245
Sección B – soluciones propuestas 310

Parte 4.
Sección A: soluciones propuestas 325
Cómo calcular el producto cruzado manualmente 348
Sección B – soluciones propuestas 364

Parte 5. Soluciones propuestas 374

Prefacio, WorldMath – Español, ejercicios

Este es el cuaderno de ejercicios de “WorldMath – Español”.
Con preguntas y propuestas de respuestas.

Para secundaria y más. Comenzamos con las cuatro operaciones aritméticas básicas y terminamos en el primer o segundo semestre del estudio para licenciatura o candidato.

El libro es independiente de qué colección de fórmulas se utilice.

El libro también es independiente del uso de una calculadora o un programa de cálculo.

Autor: Tom Pedersen, ingeniero de procesamiento mecánico, Ph.D. de la Universidad Brunel. He trabajado en el ámbito empresarial como líder de proyectos y consultor, como investigador y como profesor en escuelas técnicas de Elsinore y Copenhague, así como en la Universidad Técnica Danesa, donde trabajo actualmente. He dado conferencias sobre varias materias, incluidas muchas matemáticas. He sido conferenciante en todos los temas presentados en este libro…….¡Disfruta!
Tom Pedersen, enero de 2024.

Parte 1. Conceptos básicos - ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales

1A.001 Por favor calcule: $119 + 27$

1A.002 Calcular: $9003 + 271$

1A.003 Calcular: $19.01 + 26.55$

1A.004 Calcular: $19.01 + 357.014$

1A.005 Calcular: $78 + 101.01 + 7.7803$

1A.006 Calcular: $228 - 17$

1A.007 Calcular: $227 - 18$

1A.008 Calcular: $227 – 18.34$

1A.009 Calcular: $916.07 - 805$

1A.010 Calcular: $111 - 112$

1A.011 Calcular: $27 - 318$

1A.012 Calcular: $94.17 – 2016.4$

1A.013 Calcular: $11.1 – 2222.22$

1A.014 Calcular: $3 \cdot 27$

1A.015 Calcular: $812 \cdot 694$

1A.016 Calcular: $812 \cdot 694.03$

1A.017 Calcular: $812.99 \cdot 694.03$

1A.018 Calcular: $2.22 \cdot 33.33$

1A.019 Calcular: 98 : 7 o $\frac{98}{7}$

1A.020 Calcular: 96 : 12 o $\frac{96}{12}$

1A.021 Calcular: 96 : 8 o $\frac{96}{8}$

1A.022 Calcular: 100 : 8 o $\frac{100}{8}$

1A.023 Calcular: 101 : 8 o $\frac{101}{8}$

1A.024 Calcular: 19 : 12 o $\frac{19}{12}$

1A.025 Calcular: 12 : 96 o $\frac{12}{96}$

1A.026 Calcular: 12 : 97 o $\frac{12}{97}$

1A.027 Acortar las fracciones

$\frac{9}{33}$ $\frac{112}{84}$ $\frac{-52}{65}$ $\frac{12}{160}$ $\frac{165}{-33}$

$\frac{21}{238}$ $\frac{437}{769}$ $\frac{242}{550}$ $\frac{910}{13013}$

1A.028 Calcula lo siguiente

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ $\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3}$ $\frac{1.2}{2} \cdot \frac{2}{1.2}$ $\frac{1.2}{2} \cdot \frac{3}{1.2}$

1A.029 Complete los espacios vacíos:

$\frac{4}{?} = \frac{20}{40}$ $\frac{6}{?} = \frac{3}{5}$ $\frac{7}{12} = \frac{14}{?}$

$\frac{?}{48} = \frac{-7}{6}$ $\frac{6}{7} = \frac{?}{28}$ $\frac{-6}{26} = \frac{6}{?}$

1A.030 Calcula lo siguiente:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{2}{1.5}$ $\quad$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{-2}{1.5}$

$24 \cdot \frac{7}{8}$ $\quad$ $-24 \cdot \frac{7}{8}$ $\quad$ $24 \cdot \frac{-7}{8}$

$24 \cdot \frac{7}{-8}$ $\quad$ $-\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 7$

1A.031 Acortar las fracciones

$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}$ $\quad$ $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}}$ $\quad$ $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{1}}$

$\frac{\frac{1}{7}}{7}$ $\quad$ $\frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}$ $\quad$ $\frac{\frac{11}{13} \cdot \frac{11}{14}}{\frac{13}{14}}$

1A.032 Acortar las fracciones

$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{7}}{2 - \frac{10}{4}}$ $\quad$ $\frac{3 - \frac{2}{7}}{4 - \frac{5}{4}}$ $\quad$ $\frac{\frac{2}{3} - 3}{-6 + \frac{1}{3}}$

$\frac{-\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$ $\quad$ $\frac{\frac{4}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}$

1A.033 Encuentre un denominador común y reduzca:

$\frac{3}{7} + \frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{5}{6} - \frac{2}{9}$ $\quad$ $-\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

1A.034 Encuentre un denominador común y reduzca:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$$

1A.035 Reducir lo siguiente:

$$\frac{(-4)\cdot\frac{11}{7}}{-\frac{11}{7}} \qquad \frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}}{(-4)\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}} \qquad \frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}+6\cdot\frac{9}{13}}{\frac{7}{9}}$$

1A.036 Reducir lo siguiente:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2} \qquad \frac{6-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}+4} \qquad \frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{15}{4}-2}$$

$$\frac{\frac{8}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}+\frac{16}{3}}$$

1A.037 Escribe estas fracciones como números decimales y porcentaje:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{7}{8} \qquad \frac{18}{12} \qquad \frac{1000}{25} \qquad \frac{5}{10} \qquad \frac{10}{5}$$

1A.038 ¿Cuál es el porcentaje para:
35 de 140? 35 de 70? 35 de 175?

1A.039 Escribe estos porcentajes como fracciones:100%, 50%, 75%, 250%, 10%, 5%, 2%

1A.040 ¿Cuántos puntos porcentuales es el cambio del 50% al 60%? ¿Del 80% al 90%? ¿Del 50% al 40%?

1A.041

En diciembre un cuenco de cristal cuesta 400 dólares.

En enero cuesta 350 dólares.

¿Cuál es la reducción de precio en porcentaje?

Más tarde los clientes se acostumbraron al precio de 350 dólares.

En abril el precio sube a 400 dólares.

¿Cuál es el aumento de precio en porcentaje?

1A.042 Reducir lo siguiente:

$x+x+x$	$2x-x-x$	$x-x-x$
$x\cdot y\cdot z$	$a+b-2a$	$a\cdot b-2a$
$4b-13b$		

1A.043 Reducir lo siguiente:

$\frac{3x}{x}$	$\frac{3x}{y}$	$\frac{3x+3y}{y}$

$\frac{3a}{b} + \frac{a}{2b}$ $\frac{8b}{b} - \frac{8}{8}$

1A.044 Añade lo que falta:

$\frac{4}{?} = \frac{20}{40}$ $\frac{6}{?} = \frac{3}{5a}$ $\frac{7\text{aa}}{?} = \frac{14a}{24}$

$\frac{48}{?} = \frac{6}{-7}$ $\frac{6}{7c} = \frac{?}{28c^2}$ $\frac{26}{?} = \frac{-26}{6}$

1A.045 Multiplica entre paréntesis:

$x \cdot (2 - y)$ $-4(x - y)$ $(3 - x) \cdot 3$

$(7 - y)2$ $3a(6 - a)$ $2(2 - a)4$

1A.046 Multiplica entre paréntesis:

$4(7a + b) + 8(a + 3b)$

$6(d - 2e - f) + 2(d - e + 2f)$

$a(a - b) + b(a + b)$

1A.047 Ponga un factor común fuera de paréntesis:

$14 - 7a$ $4a + 8b$

$10a + 5b$ $8 - 4x$

$18x - 3xx$ $-6xy + 4x$

1A.048 Dividir la fracción en dos fracciones:

$\frac{2x+2y}{4}$ $\frac{3a-3b}{4}$ $\frac{3a-3b}{3}$

$\frac{3aa-3ab}{3a}$ $\frac{3a-3b}{\frac{1}{2}}$

1A.049 Reducir lo siguiente:

$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}$ $\frac{2\pi}{4\pi}\cdot 8\pi-5\pi$

1A.050 Multiplica las identidades entre paréntesis:

$(a+b)(c-d)$ $(4+a-b)(a+b)$

$(2a+b)(b-3a)2$ $(5a-5b)(5a+4b)$

1A.051 Usa las reglas de los cuadrados de izquierda a derecha para calcular:

$(x+y)^2$ $(x-y)^2$ $(4x+1)^2$

$(\frac{1}{2}x+1)^2$ $(\mathrm{x}-5)^2$ $(2x+2y)^2$

$(a+b)(a-b)$ $(3a+1)(3a-1)$

$(3a+4b)(3a-4b)$

1A.052 Usa las reglas de los cuadrados de izquierda a derecha para calcular:

$x^2 + 4 - 4x$ $\quad$ $4 + x^2 - 4x$ $\quad$ $9 - x^2$

$a^2 - b^2$ $\quad$ $9a^2 + 4b^2 + 12ab$

$4 + 36b^2 - 24b$

1A.053 Usa las reglas del cuadrado para calcular:

$(3x - 5y)^2$ $\quad$ $(1 - 2x)^2$ $\quad$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$(-3 - 3x)(-3 + 3x)$

1A.054 Usa las reglas del cuadrado para calcular:

$a^2 + b^2 - 2ab$ $\quad$ $4b^2 + 1 - 2b$ $\quad$ $4^2 - b^2$

$(3a)^2 - (4b)^2$

1A.055 Reducir lo siguiente:

$\frac{4a^2-9}{4a^2+9-12a}$ $\quad$ $\frac{b^2+9+6b}{b^2+3b}$ $\quad$ $\frac{3c^2-12c+12}{5c^2-10c}$

1A.056 Reducir lo siguiente:

$\frac{4a^2-16a+16}{5a^2-10a}$ $\quad$ $\frac{9b^2-16c^2}{3a-4c}$ $\quad$ $\frac{8b^2-18c^2}{2b+3c}$

1A.057 Lift the parenthesis:

$x(x + 1) + 1$ $\quad$ $(1 + x)x + 1$ $\quad$ $x(x + 2x)$

1A.058 Levante los paréntesis:

$x(x(x+1)+1)+1$

1A.059 Vuelva a escribir, estableciendo paréntesis, de modo que x sea elevado a uno:

x^3+x^2+x+1

1A.060 Calcula lo siguiente:

$(x-3)^2+(x+3)(x-3)$

$(4x-2)^2-(2x+2)^2-6x(x-2)$

$(x+1)^2+(x-1)^2$

$-(4x-5)(4x+5)+(3x+2)^2+7x^2$

$(3x-2)^2-(3x+2)(3x-2)+3(3x+2)$

1A.061 Calcula lo siguiente:

$\sqrt{4}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{169}$
$\sqrt{0}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-16}$

¿Es posible calcular la raíz cuadrada de un número negativo? Si no es posible, simplemente responda: *no hay solución*.

1A.062 Calcula lo siguiente:

$\sqrt{0.64}$ $\sqrt{0.81}$ $\sqrt{\frac{36}{4}}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{\frac{-4}{-9}}$

1A.063 Calcula lo siguiente:

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{2+2}$

$\sqrt{64+36}$ $\sqrt{2^2-4}$ $\sqrt{10^2-4\cdot 8\cdot 5}$

1A.064 Calcula lo siguiente:

$\sqrt{10\cdot 10}$ primero multiplica y luego calcula la raíz cuadrada.

$\sqrt{10\cdot 10}$ primero divide la raíz cuadrada y luego multiplica.

$\sqrt{9\cdot 4}$ primero multiplica y luego calcula la raíz cuadrada.

$\sqrt{9\cdot 4}$ primero divide la raíz cuadrada y luego multiplica.

1A.065 Calcule lo siguiente de la forma habitual:

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{\frac{121}{36}}$

Luego, primero dividiendo la raíz cuadrada, seguido de la división:

1A.066 Calcula lo siguiente:

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}$ $\sqrt{4} + \sqrt{4}$ $\sqrt{4} - \sqrt{4}$

$\sqrt{4} + \sqrt{16}$ $\sqrt{4 + 16}$ $\sqrt{4 + 9}$

$\sqrt{4 \cdot 9}$

1A.067 Calcule lo siguiente (primero elevando al cuadrado y luego la raíz cuadrada):

$\sqrt{(-8)^2}$ $\sqrt{(-9)^2}$ $\sqrt{(-a)^2}$

$\sqrt{(-ab)^2}$

1A.068 Calcula lo siguiente:

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ $\sqrt{\frac{a}{a}}$ solución habitual $\sqrt{\frac{a}{a}}$ solución alternativa

$\sqrt{\frac{16x}{25y}}$

1A.069 Calcula lo siguiente:

$10^3 \cdot 10^3$ $10^2 \cdot 10^5$ $10^{-2} \cdot 10^5$

$10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$ $10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$ $10^{-\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$

1A.070 Reducir lo siguiente:

$\frac{1}{10^{-1}}$ $\frac{2}{10^{-4}}$ $\frac{10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4}}$

$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3}$ solución habitual $\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3}$ solución alternativa

1A.071 Reducir lo siguiente:

$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot\ 10^{-4} \cdot 10^{-3}}$ $\frac{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}} \cdot (10^4)^2}{10^2 \cdot 10^{-1}}$

1A.072 Reducir lo siguiente:

$\frac{10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 0.1}{\frac{1}{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2}$ $\frac{0.01 \cdot 0.1 \cdot \frac{2}{10}}{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{10^{11} \cdot 10^0 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}}$

1A.073 Reducir lo siguiente:

$\frac{1}{x^{-1}}$ $\frac{2}{x^{-4}}$ $\frac{x^2 \cdot x^{-1}}{x^{-4}}$

1A.074 Reducir lo siguiente:

$5^2 - 4^2$ $4 \cdot 2^{-5}$

$2 \cdot (-2)^5$ $2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2$

1A.075 Reducir lo siguiente:

$(2 \cdot 3)^3$ $((2 \cdot 3)^3)^2$

$\left(\left(\frac{10}{5}\right)^3\right)^2$ $\left(\left(\frac{11}{5}\right)^3\right)^2$

1A.076 Acorta lo siguiente:

$6^2 \cdot 6^3$ $\quad 4^6 \cdot 5^6$ $\quad \frac{5^5}{5^3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5$ $\quad \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^7}{\left(\frac{3}{4}\right)^6}$

$\frac{4^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ $\quad (4^3)^5$ $\quad (8^4)^5$

1A.077 Acorta lo siguiente:

$\frac{4^3 \cdot 3^3}{6^3}$ $\quad \frac{5^3 \cdot 3^3}{18^3}$ $\quad \frac{(4^2)^7}{16^7}$

$3^6 \cdot\ 6^6 \cdot\ \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\quad \left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 6^5$

1A.078 Acorta lo siguiente:

$4^5 \cdot\ 3^5 \cdot\ \frac{1}{12^4}$ $\quad \frac{2^3 \cdot 3^3}{12^3}$ $\quad \frac{4^4 \cdot 8}{2^5}$

$(4^3)^2$ $\quad 4^{3^2}$

1A.079 Reducir lo siguiente:

$(a \cdot b)^3$ $\quad ((a \cdot b)^3)^2$

$\left(\frac{x}{y}\right)^3$ $\quad \left(\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)^2$

1A.080 Convierta a exponenciales y reduzca lo siguiente:

$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{8}$ $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{8}$ $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$

$\sqrt[5]{243}^3$

1A.081 Convierta a exponenciales y reduzca lo siguiente:

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{4}$ $\frac{\sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[4]{6^2}}{6\sqrt{6}}$

1A.082 Resuelve la ecuación:

$18x + 13 = 13x + 58$

1A.083 Resuelve la ecuación y prueba la respuesta insertándola en la ecuación.

$14(5 + x) = 5(3x - 4) - 3(5 - 2x)$

1A.084 Resuelve las ecuaciones:

$4 - x = 11$ $5 - x = 5$ $-3x = 24$

$\frac{3}{4}x = 7$ $\frac{1}{2}(1 + x) = 8$

1A.085 Resuelve las ecuaciones:

$\frac{4y+1}{5}-\frac{4y-3}{4}=-3$ $\frac{z+3}{2z}-\frac{2z-5}{3z}=\frac{1}{6}$ $y \;\; z\neq 0$

1A.086 Resuelve la ecuacion:

$\frac{6y-5}{6}-\frac{8-6y}{6}=-\frac{7y+3}{8}-\frac{9-2y}{3}$

1A.087 Resuelve las ecuaciones:

$\frac{5}{y}=\frac{5}{9}$ $\frac{x}{9.7}=\frac{3.95}{7.9}$ $\frac{a+6}{13}=\frac{5}{8}$

$\frac{6}{5+5}=\frac{b}{5}$ $\frac{c}{5}=\frac{15+c}{5+3}$

1A.088 Resuelve las ecuaciones:

$0.45x = 1.35$ $x=\frac{1.35}{0.45}=3$ $-4x=-\frac{1}{4}$

$-\frac{7}{5+3}x=-\frac{1}{6}$

1A.089 Resuelve las ecuaciones para x ≥ 0

$x^{\frac{1}{2}}=3$ $x^{\frac{1}{2}}-2=0$ $2x^{\frac{1}{2}}-2=0$

1A.090 Resuelva la ecuación considerando primero valores de x que no son posibles:

$$\frac{16x-2}{2(2x+1)} = \frac{12x-12}{3x-4}$$

1A.091 Resuelve la ecuación con respecto a x:

$$4 + 4x = 2ax + 6$$

1A.092 Resuelve la ecuacion:

$$x^2 - 2\mathrm{x} + 1 = 0$$

1A.093 Resuelve la ecuacion:

$$x^2 - 2\mathrm{x} = 0$$

1A.094 Resuelve la ecuacion:

$$-2 - 3x = -2x^2$$

1A.095 Resuelve la ecuacion:

$$|x| = \sqrt{\mathrm{x}}$$

1A.096 Resuelve la ecuacion:

$$-\sqrt{2 - \mathrm{x}} = 0$$

1A.097 Resuelve las ecuacionas:

$$x(x-3) = 0$$

$4x(x+4)=0$

$(x-3)(x-7)$

$4(x-5)(x-1)=0$

$8(x+4)x=0$

1A.098 Resuelve la ecuacion:

$-x^2-2\text{x}+3=0$

$2x^2+4\text{x}-20=0$

$2x^2-4\text{x}+8=0$

1A.099 Resuelve la ecuacion:

$-5x^2-4\text{x}-1=0$

1A.100 Resuelve la ecuación adivinando raíces y ve si da una expresión verdadera o falsa. Luego verifique por CAS.

$x^3+x^2=0$

1A.101 Encuentra una raíz para x adivinando e insertando. Luego verifique por CAS.

$x^3+x^2-2=0$

1A.102 Resuelve las ecuacionas:

$x^4 = 16$ $\qquad\qquad$ $x^4 = 81$

1A.103 Estima las dos raíces en la ecuación, luego verifica por CAS:

$x^4 + x^2 = 81$

1A.104 Resuelva estas ecuaciones usando primero la ecuación para resolver ecuaciones de segundo grado:

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0$ $\qquad\qquad$ $2x^4 - 64x^2 - 288 = 0$

1A.105 Resuelva esta ecuación usando primero la solución cero:

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

1A.106 Resuelve estas dos ecuaciones con dos incógnitas:

$10x + 4y = 44$ $\;y\;$ $2x - y = 7$

1A.107 Resuelve estas dos ecuaciones con dos incógnitas:

$2x - y = 6$ $\;y\;$ $3x - 5y = 2$

1A.108 Resuelve estas dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{3}{2x-3y+3} = \frac{4}{3x-4y+3} \quad y \quad \frac{5}{3x+4y-6} = \frac{5}{4x+3y+1}$$

1A.109

$$x + \frac{1}{2}y = 4 \quad y \quad 2x - 3y = -3$$

1A.110

$$\frac{1}{2}x + 3y = -7 \quad y \quad -2x + 2y = -14$$

1A.111

¿En cuál de estas expresiones x e y son proporcionales?

1) $x = 4y$ 2) $x = \frac{1}{2}y$ 3) $x = \frac{1}{y}$

4) $x = 4y + 3$ 5) $x = \frac{2}{y} - 4$ 6) $x = k \cdot \frac{1}{y}$

1A.112

Podemos usar valores de x en un intervalo abierto de 2 a 3.
Muestre esto en una figura, en un paréntesis de intervalo y en una desigualdad.
Luego muéstrelo durante un intervalo cerrado.

1A.113

Podemos usar valores de y mayores que -17. Muestre esto en una figura, en un paréntesis de intervalo y en una desigualdad.
Podemos usar valores de y mayores o iguales a -17. Muestre esto en una figura, en un paréntesis de intervalo y en una desigualdad.

1A.114 Resuelve las dos desigualdades:

$\frac{1}{2}x + 3 > -\frac{1}{3}x + 4$

$\frac{4}{3}x - 3 > 4 - \frac{1}{3}x$

1A.115 Resuelve la doble desigualdad:

$2x - 4 < 2x + 3 < 6 - x$

Parte 1. Conceptos básicos - ejercicios

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas

1B.01
Un recipiente con agua está lleno al 20%. Si se llena con 8 metros cúbicos más, estará lleno al 25%. ¿Qué tamaño tiene el barco?

1B.02
Un palé con sacos de grano pesa 419 kg, pero no se sabe cuántos sacos son. Se coloca encima otro saco de grano y la masa total es ahora de 440 kg. ¿Cuántos sacos de grano había al principio?

1B.03
Una bañera puede contener 300 litros de agua. Se llena con 40 litros por minuto, pero la salida está parcialmente abierta y salen de nuevo 17 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo llevará llenar la bañera?

1B.04
Un caballo come el 75% de un fardo de heno al día. ¿Cuántas balas de heno comerán 5 caballos en 30 días?

1B.05
Un tanque de combustible está lleno al 10%. Con 20 litros más se llena un 14%. ¿Qué tan grande es el tanque?

1B.06
Cuatro caballos comen 2,5 fardos de heno al día. Cada tres días sólo comerán dos caballos. Cada tres días comerán tres caballos, y

 ISBN 978-87-975307-3-3

cada tercer día cuatro caballos. En el granero hay 450 fardos de heno. ¿Cuántos días durarán?

1B.07
d=3800$\sqrt{h}$ es una expresión aproximada para la distancia (en metros) al horizonte cuando miramos al mar desde la altitud (altura) h.

Calcule d para h = 2 my para h = 40 m.

Estamos al nivel del mar. ¿Desde qué distancia podemos ver la cima de una montaña de 1000 m de altura?

(En el problema 2B.09 se presentará un método de cálculo mucho más preciso).

1B.08
Dos coches cuestan 200.000 dólares, incluido el 25% de IVA.

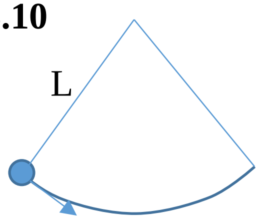
¿Cuánto cuesta un coche sin IVA?

1B.09
La ecuación describe una estimación aproximada en millones de libras para un bloque de pisos: $\mathrm{E} = 250 + \frac{n}{2}(\mathrm{n} + 4)$ donde E son gastos, 250 son gastos fijos, $\frac{n}{2}(\mathrm{n} + 4)$ son variables gastos con n como el número de pisos hasta n = 20.

¿Cuáles son los gastos tanto para un edificio de 8 pisos como para uno de 12 pisos?

¿Cuántos pisos son posibles por 450 millones de libras?

1B.10



El período T (en segundos) de un péndulo matemático es aproximadamente:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ donde L es la longitud del cable en metros y g es la aceleración de gravitación de aprox. 9,82 (unidad: $\frac{m}{s^2}$)

Calcule el período T para una bola de demolición que se balancea con cables de 5, 10 y 15 metros de longitud.

1B.11

La densidad ϱ (un "rho" griego) depende de la masa (m) y el volumen (V).

¿Cómo depende ϱ de m? ¿Y cómo depende ϱ de V?

Una esfera sólida pesa 15 kg y tiene un volumen de 0,002 m^3. ¿Cuál es la densidad?

1B.12

Un fabricante de kayaks quiere un nuevo modelo que pese menos de 20 kg. La resistencia del material exige que pese al menos 15 kg.

Escribe el rango de masa opcional como un intervalo y como una desigualdad.

1B.13
Una bomba de suministro de agua produce 90 m^3 por hora. Se inicia suavemente (linealmente) en 20 segundos, funciona durante 12 minutos y se detiene suavemente en 40 segundos. ¿Cuánta agua ha bombeado?

1B.14
El azúcar de caña se compone de:

- 12 átomos de carbono con masa 12 u (unidades) cada uno.
- 12 átomos de hidrógeno de 1 u cada uno.
- 11 átomos de oxígeno de 16 u cada uno.

¿Cuál es la cantidad masiva de carbono, hidrógeno y oxígeno en porcentaje?

1B.15
El agua se compone de:

- 2 átomos de hidrógeno con masa 1 u (unidades) cada uno.
- 1 átomo de oxígeno de 16 u.

¿Cuál es la cantidad másica de hidrógeno y oxígeno en porcentaje?

Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones - ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales

2A.001 Determinar los valores numéricos de:

$\lvert -5 \rvert$	$\lvert 5 \rvert$	$\lvert 0 \rvert$
$\lvert \frac{1}{2}+4 \rvert$	$\lvert \frac{1}{2}-4 \rvert$	$\lvert -a \rvert$
$\lvert -ab \rvert$	$\lvert -5+2 \rvert$	$\lvert -7-5 \rvert$
$\lvert -7+5 \rvert$	$\lvert -\frac{11}{4} \rvert$	$\lvert -5018 \rvert$

2A.002

Dibuja un sistema de coordenadas y marca los puntos A(0,3) B(5,-2) y C(-2,-3).

Calcule las distancias |AB| |BC| |CA| |AC| y mida la distancia para comprobar la resolución.

2A.003

Muestre estos cuatro puntos en un sistema de coordenadas y calcule las seis distancias entre los puntos:
A(-4,2) B(2,6) C(8,8) D(11,5)

2A.004
Una línea recta pasa por los puntos A(-4,2) y B(2,6). Determina la ecuación de la recta.

2A.005

Determine las ecuaciones para las rectas donde:

l_1: P(0,5) y a = 2

l_2: P(0,-3) y a = 6

l_3: P(0,-$\frac{1}{2}$) y a = -$\frac{1}{8}$

l_4: P(2,1) y a = -$\frac{1}{4}$

Y dibuja las líneas en un sistema de coordenadas.

¿Son l_2 y l_3 ortogonales (perpendiculares)?

2A.006

Dos rectas l_1 y l_2 tienen la misma pendiente. Se pasa por (-4,1) y (4,3). El otro pasa por (3,0). ¿Cuáles son sus ecuaciones?

2A.007

Una línea l pasa por el punto O(0,0) y P(3,3), mientras que la línea m pasa por Q(3,2) y R(-1,-4).

¿Cuáles son sus ecuaciones? ¿Son paralelos?

Dibuja las líneas en un diagrama.

2A.008

Una línea l_1 tiene la ecuación/función: $2x+4y-14=0$

Una recta l_2 tiene la misma pendiente y pasa por el punto (5,7).

Determine la ecuación/función para l_2.

2A.009

Dados los puntos: A(-2,3) B(6,6) C(4,-2).

Determina las tres rectas que pasan por los puntos.

2A.010

Línea dada l: $2x - y = 4$

¿Dónde se cruzará esta línea con el eje x y el eje y?

2A.011

Dadas las rectas: $3x - 4y = 0$

Y: $kx + 3y = 12$

¿Qué valor de k hará que las líneas sean paralelas?

¿Qué valor de k hará que las líneas sean ortogonales?

2A.012

Una línea l_1 tiene la ecuación/función: $y = \frac{3}{4}x + 1$

Una línea l_2 tiene la ecuación/función: $y = \frac{3}{7}x + \frac{22}{7}$

¿Dónde se cruzan las líneas con el eje y?

Dibuja las líneas en un diagrama.

Calcula el área del triángulo formado.

2A.013

Dibuja las parábolas en un diagrama:

$f(x) = x^2$ $g(x) = 4x^2$ $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

2A.014

Dibuja las parábolas en un diagrama:

$i(x) = -x^2$ $\quad$ $j(x) = -4x^2$ $\quad$ $k(x) = -\frac{1}{4}x^2$

2A.015

¿De dónde viene la parábola $\quad f(x) = x^2 - 2x - 8$
intersecan el eje x y el eje y?

Calcula las coordenadas del vértice.

Dibuja la parábola.

2A.016

¿Dónde está la recta $\quad y = -x - 2$

y la parábola $\quad y = 2x^2 + 6x - 2$ $\quad$ se cruzan?

Además, haz un boceto como control.

2A.017

¿Dónde están las parábolas $\quad y = x^2 - 4x - 4$

y $\quad y = 2x^2 + x$ $\quad$ se cruzan?

Además, haz un boceto como control.

2A.018

¿Dónde están las parábolas $\quad 2x = -2x^2 + y$

y $\quad 4 = -x + x^2 + y \quad$ se cruzan?

Además, haz un boceto como control.

2A.019

Dibuja la parábola $\quad y = -x^2 + 6x - 5$

Lea los puntos de intersección con los ejes xey y lea el vértice.

Calcule los puntos de intersección con los ejes xey y calcule el vértice.

Determine mediante lectura y cálculo dónde la recta y = 5 cortará la parábola. dibuja la parábola

2A.020

Factorize $\quad f(x) = x^2 - x - 6 \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$

2A.021

Dado $\quad f(x) = 3x - 4 \quad$ y $\quad g(x) = x + 2$

Calcular f(x) + g(x) and f(x) – g(x) y dibuje las cuatro funciones en el mismo diagrama.

2A.022

Dado $\quad f(x) = 3x - 4 \quad$ y $\quad g(x) = x + 2$

Encuentre las funciones compuestas f(g(x)) y g(f(x)) y dibujelas en un diagrama.

Sea f(g(x)) el nombre h(x) y g(f(x)) el nombre i(x). Encuentra las funciones inversas $h^{-1}(x)$ e $i^{-1}(x)$ y dibújalas en el mismo diagrama.

2A.023

Comprueba si estos triángulos tienen ángulos rectos y, de ser así, calcula el área.

a = 2	b = 3	c = 3.8
a = 3	b = 4	c = 5
A(2,3)	B(5,4)	C(10,0)
D(0,0)	E(2,4)	F(10,0)

2A.024

Encuentra el centro y el radio de los círculos:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

$$y^2 - 12y = -x^2 - 16x$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y = 12$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 20 = 0$$

2A.025

¿Estas ecuaciones describen círculos?

$$x^2 + y^2 + 12x + 35 = 0$$

$x^2 + y^2 + 12x + 36 = 0$

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - x + \frac{3}{2}y + \frac{35}{2} = 0$

2A.026

Dados tres puntos C(7,-4) P(36,41) Q(50,-30)

Un círculo con centro en C tiene r = 52. ¿Pasará por P y Q?

2A.027

Dado el círculo con C(-3,2) y r = 4

Determina la función/ecuación del círculo.

Luego prueba si estos puntos están en el círculo: P(1,4) Q(-5,-4)

R(1,2)

Finalmente, encuentra la circunferencia y el área del círculo.

2A.028

Determine la ecuación de la circunferencia con centro (2,5) y que pasa por el punto (-3,-7).

¿Dónde se cruza el círculo con el eje x y el eje y?

2A.029

Encuentra el centro del círculo $x^2 - x + y^2 + y = 5$

y encuentra la ecuación/función de otra circunferencia con el mismo centro y con la tangente $y = \frac{4}{3}x + \frac{23}{6}$

Hacer un boceto aproximado.

2A.030

Utilice tablas o CAS para determinar:

cos 60°	sin 60°	cos 45°	sin 45°	cos 30°	sin 30°
cos 90°	sin 90°	cos 100°	sin 100°	cos 135°	sin 135°

Tenga en cuenta que algunos CAS solo muestran una respuesta, aunque puede haber dos respuestas. Puedes asegurarte haciendo un boceto de círculo unitario.

2A.031

Marque en un círculo unitario los puntos a 25° y 65° del eje x y escriba sus coordenadas usando senos y coseno, así como números decimales.

2A.032

Marque en un círculo unitario los puntos a 45° y 135° del eje x y escriba sus coordenadas usando senos y coseno, así como números decimales.

2A.033

Utilice tablas o CAS para encontrar el ángulo cuando:

cos v = 0	cos v = 1	sin v = 0

sin v = 1   sin v = 0.707   sin v = 0.342

cos v = - 0.5   cos v = - 0.94

y muestra los ángulos en un círculo unitario.

Tenga en cuenta que a menudo hay dos ángulos para cada función (a menos que estemos en el eje x o en el eje y), y que algunos CAS solo muestran uno de ellos, a menudo el ángulo más pequeño.

2A.034

Utilice CAS para determinar:

tan 20°   tan 100°   sin 20°   cos 135°

2A.035

Muestre en un círculo unitario los dos ángulos donde tan v = 2

2A.036

Dos ángulos miden 45° y 90°. ¿Cuantos estan en radianes?

2A.037

Dos ángulos miden $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{3\pi}{4}$ rad. ¿Cuantos estan en grados?

2A.038

¿Cuántos grados giramos en una vuelta (un ciclo)? – ¿Y cuántos radianes?

2A.039

¿Cuál es la longitud del arco cuando recorre 180° en un círculo con radio de 40 metros?

2A.040

¿Cuál es la longitud del arco cuando recorre 270° en un círculo con radio de 0,8 metros?

2A.041

Dibuje las funciones en un diagrama y lea la amplitud y el período para:

f = sin x g = 2sin x h = 3sin x

Donde x es el ángulo en radianes.

2A.042

Dibuje las funciones en un diagrama y lea la amplitud y el período para:

f = sin x g = sin 2x h = sin $\frac{x}{2}$

Donde x es el ángulo en radianes.

2A.043

Dibuje la función $f(x) = \sin x$ en un diagrama para $0 \leq x \leq 2\pi$ y lea los valores de x donde f(x) = 0

Resuelva mediante cálculo f(x) = 0 y compare con la lectura.

2A.044

Dibuje la función $f(x) = \sin x$ en un diagram para $0 \leq x \leq 6\pi$

y lea los valores de x donde $f(x) = 0$

Resuelva por cálculo y/o círculo unitario $f(x) = 0$ y compare con la lectura.

Intente encontrar una forma breve de presentar la respuesta.

2A.045

Una oscilación sinusoidal

$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k$

tiene A = 2 k = -1 φ = 0 T = 3

Escribe/encuentra la ecuación y dibújala en un diagrama.

2A.046

Una oscilación sinusoidal

$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k$

tiene A = 2 k = 4 φ = 0 T = 10

Escribe/encuentra la ecuación y dibújala en un diagrama.

2A.047

Considere la oscilación sinusoidal

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3)$

Dibuje la función en un diagrama desde t = - 5 hasta t = 5.

Muestre en la figura la parte de la curva donde f(t) > 1

Muestra/marca dónde leer el cambio de fase y también calcula el cambio de fase.

Lea el período y también calcule el período.

2A.048

¿El punto (5.5, 1.5) de la curva es:

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3)$

2A.049

Resuelve la siguiente ecuación para for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$2 + (\tan x)^2 = 2 + \tan x$

2A.050

Dibuje la función $f(x) = y = \sin x$ en un diagrama para $0 \leq x \leq 2\pi$

Luego marque donde $\sin x > 0.75$ y lea el intervalo correspondiente para x.

Finalmente, calcule el intervalo para x.

2A.051

Dibuje la función $f(x) = y = \cos x$ en un diagrama para $0 \leq x \leq 2\pi$

Luego marque donde $\cos x < -0.5$ y lea el intervalo correspondiente para x.

Finalmente, calcule el intervalo para x.

2A.052

Dibuje un círculo unitario y marque el arco y el rango donde sin v > 0,5

Lea el dominio correspondiente para x.

Calcula los ángulos correspondientes con el eje x.

Calcula el dominio de x.

2A.053

Resuelve la siguiente ecuación para $0 \leq x \leq \pi$

$$1 = \frac{3\sin x + 1}{4(\sin x)^2 + 1}$$

2A.054

En un triángulo isósceles los ángulos A y C miden 70° y los lados a y c miden 15°.

¿Cuánto dura el aire acondicionado?

¿Qué tamaño tiene el ángulo B?

¿Cuánto mide la altura de B a B?

2A.055

En el triángulo ABC tenemos: a = 6   b = 12   c = 9

Calcule A, B y C.

2A.056

En el triángulo ABC tenemos: a = 5   c = 8   B = 55°

Calcule A, C y b.

2A.057

En el triángulo ABC tenemos: b = 7   c = 6   B = 80°

Calcule C, A y a

Calcula también el área del triángulo.

2A.058

Los triángulos ABC y DEF tienen un solo ángulo.

a = 7   b = 8   c = 9

El área del triángulo DEF es 4 veces mayor que el área del triángulo ABC.

¿Cuáles son las longitudes de los lados de d, e y f?

2A.059

En el triángulo ABC tenemos: A = 45°   a = 2,3   b = 2,7

Calcule c, B y C.

Nota sobre funciones exponenciales en varias formas:

El libro de texto tiene la ecuación/fórmula: $f(x) = b \cdot a^{kx}$ (1)

y: $f(x) = b \cdot c^{x} \quad for \quad c = a^{k}$ (2)

El libro de texto también tiene: $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ (3)

Si se prefiere k como parte del exponente, usamos (1).

Si se prefiere k como parte del número base, usamos (2).

En (2) las dos constantes a y k de (1) se combinan en una constante mutua c:

$f(x) = b \cdot a^{kx} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = b \cdot (a^k)^x \quad => \quad f(x) = b \cdot c^x$

En (3) se expande el número base, que se utiliza a menudo en economía.

El uso de las dos ecuaciones/fórmulas para duplicar y dividir por la mitad:

$T_2 = \frac{ln\,2}{ln\,c} = \frac{ln\,2}{ln\,a^k} \quad y \quad T_{½} = \frac{ln\,½}{ln\,c} = \frac{ln\,½}{ln\,a^k}$

Dependerá de qué forma usemos: (2) o (1).

Si utilizamos (3), es posible que tengamos que realizar más cambios, que están fuera del alcance de este libro.

Las siguientes soluciones propuestas mostrarán cómo abordar esto.

2A.060

Dibuja las funciones en un diagrama:

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad y \quad g(x) = (3)^x$

¿Cuáles son las características de las dos funciones?

2A.061

Dibuja las funciones en un diagrama:

$h(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \quad y \quad i(x) = 2(3)^{2x}$

¿Cuáles son las características de las dos funciones (también en comparación con las funciones del problema 2A.060)?

2A.062

Si invertimos 40 000 dólares y esperamos una tasa de interés promedio estimada del 6% anual, ¿cuánto dinero tendremos después de 4 años?

2A.063

En una función de crecimiento exponencial

$f(x) = b \cdot a^{kx}$

sabemos que la tasa de crecimiento es del 10% y que

$f(0) = 1.5 \quad y \quad f(1) = 1.65$

Plantea la ecuación.

2A.064

En una función de crecimiento exponencial

$f(y) = b \cdot a^{ky}$ ⇔ $f(y) = b \cdot c^{y}$

a y k son constantes y pueden combinarse para formar la constante c: $a^k = c$

Sabemos que la tasa de crecimiento es del -10% y que

$f(0) = 1.5 \quad y \quad f(1) = 1.35$

Plantea la ecuación.

2A.065

Encuentra b y a en la función.

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ con dos puntos conocidos A(0,4) B(1,9)

2A.066

Una función exponencial *decreciente* se puede expresar con un valor negativo para k en la fórmula $f(x) = b \cdot a^{kx}$

O puede describirse con un valor c entre 0 y 1 en la fórmula

$$f(x) = b \cdot c^{x}$$

donde las dos constantes a y k se combinan para formar c: $a^k = c$

Dibuje las dos funciones $f(x) = 2 \cdot 3^{-4 \cdot x}$

y $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3^4}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^x$

en dos diagramas para ver que son iguales.

2A.067

Acortar el siguiente $(pasando\ de\quad f(x) = b \cdot a^{kx}\quad a\quad f(x) = b \cdot c^{x})$

$f(x) = 2 \cdot e^{0.4 \cdot x}$ $\qquad g(x) = (-0.5) \cdot e^{(-0.27) \cdot x}$

$h(x) = 3 \cdot e^{(-1.3) \cdot x}$

2A.068

Acorta las expresiones y describe si las funciones son crecientes o decrecientes. Dos de ellos están disminuyendo, ¿cuál disminuye más?

$f(x) = 0.6 \cdot e^{(-1.3) \cdot x}$ $\quad g(x) = 3 \cdot e^{1.7 \cdot x}$

$h(x) = 12 \cdot e^{(-0.4) \cdot x}$

Dibuja las curvas en un diagrama.

2A.069

En una prueba de laboratorio, el número de bacterias se desarrolla según

$N(t) = 150 \cdot e^{0.6 \cdot t}$

donde N es el número de bacterias y t es el tiempo en horas.

¿Cuántas bacterias hay al principio?

¿Cuándo se duplicará la cifra?

¿Cuándo hay 10 000 bacterias?

2A.070

Calcular/acortar

$log\ 4 + log 5$ $\quad$ $log\ \left(\frac{3}{4}\right) + log\ \left(\frac{4}{5}\right)$

$log\ 4 - log 5$ $\quad$ $log\ \left(\frac{3}{4}\right) - log\ \left(\frac{4}{5}\right)$

2A.071

Calcular/acortar

$ln\ 4 + ln 5$ $\quad$ $ln\ \left(\frac{3}{4}\right) + ln\ \left(\frac{4}{5}\right)$

$ln\ 4 - ln 5$ $\quad$ $ln\ \left(\frac{3}{4}\right) - ln\ \left(\frac{4}{5}\right)$

2A.072

Calcular/acortar

$ln(e \cdot e^3)$ $\quad$ $log(e \cdot e^3)$

$4\ ln\ e^{4-1}$ $\quad$ $4\ ln\ e^4 + 4\ ln\ e^3$

2A.073

Resolver las ecuaciones/encontrar x/aislar x

$3^{2x} = 4$ $\quad$ $3^{-2x} = 4$

$ln\ 3x = 4$ $\quad$ $ln\ 3x + 2 = ln\ 4$

2A.074

Resuelva las ecuaciones controlando las raíces encontradas, es decir, ¿las raíces conducirán a tomar el logaritmo de un número positivo?

$\log(2-2x) = ln\, e^2$

$\log(2x+6) = -0.3$

$\ln x + \ln(x-1) = 2ln\, 2$

2A.075

Resuelva las ecuaciones controlando las raíces encontradas, es decir, ¿las raíces conducirán a tomar el logaritmo de un número positivo?

$ln\, x - ln(x-1) = ln\, 2$

$ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + l\,n(x+4) + 2 = 2$

2A.076

Un crecimiento exponencial tiene la ecuación $y = 4 \cdot e^{1.1 \cdot t}$

Aislar t.

Calcule la constante de duplicación.

Dibuja la curva en el primer cuadrante.

2A.077

Dibuje la función $f(x) = 3 \cdot 1.2^x \quad for \quad x \geq 0$ en el primer cuadrante de un diagrama normal. Luego dibuje la función en el primer cuadrante de otro diagrama con una escala lineal en el primer eje y con ln f(x) en el segundo eje. Y finalmente en un diagrama con log10 f(x) en el segundo eje.

Lea los diagramas para descubrir que obtiene los mismos valores.

2A.078

Dibuja las funciones $y = \frac{3}{x} \quad e \quad y = x^3$ en un diagrama.

Lea las coordenadas de los puntos de intersección.

Calcula las coordenadas de los puntos de intersección.

Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones - ejercicios

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas

2B.01
Un depósito de agua bruta de hormigón de máx. 20.000 metros cúbicos reciben agua superficial de la naturaleza y abastecen el sistema de abastecimiento de agua local de una aldea. La depuradora tiene licencia de producción de 4 metros cúbicos por hora, hasta que el volumen del embalse alcance el 20%. A veces la naturaleza no suministra agua.

En la estación seca se evaporan una media de 20 metros cúbicos de agua al día. ¿Cuántos días de producción de agua son posibles si el embalse está lleno y luego no recibe agua cruda?

Normalmente, durante la estación seca, el embalse recibe 1.000 metros cúbicos de agua bruta en tres meses.

¿Cuál es el volumen de agua del embalse después de esos tres meses secos, si comenzó con máx. volumen (20 000 m^3)?

2B.02
Una planta procesadora de pescado se lava con agua de proceso que lleva materia orgánica (proteínas, grasas, etc.) a un tanque de concreto donde un proceso llamado flotación expulsa la materia a la superficie. Desde allí se raspa hasta un canal para su posterior procesamiento y utilización.

Visto desde arriba, el tanque debe tener un ancho interior = 3 m y un largo = 5 m. Los cuatro ángulos deben ser de 90° para que el raspador pueda instalarse correctamente. Todas las medidas están dentro de las tolerancias especificadas que no se consideran aquí.

Durante la inspección: ¿Cómo podemos medir que el ancho, el largo y los ángulos sean correctos?

2B.03

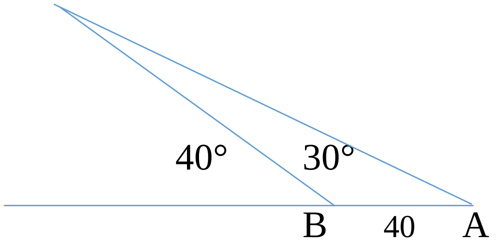
El sol brilla sobre un árbol. La sombra a lo largo del suelo horizontal tiene 29 metros de largo y el ángulo desde la parte superior de la sombra hasta la copa del árbol es de 40° con respecto a la horizontal. ¿Qué tan alto es el árbol?

2B.04

Encontraremos la altura máxima de un molino de viento colocado en tierra.

Apuntamos un dispositivo de medición desde un punto A en el suelo horizontal hacia la parte superior del molino de viento y leemos 30°. Luego seguimos una línea recta de 40 metros hacia el molino de viento y apuntamos nuevamente desde un punto B. El ángulo ahora se mide como 40°.

¿Qué altura tiene el molino de viento?



2B.05
Encontraremos la altura máxima de un molino de viento colocado en el mar.
Estamos en un barco. Apuntamos un dispositivo de medición desde un punto A, a cinco metros sobre el mar, hasta la cima del molino de viento y leemos 20°. Luego seguimos una línea recta de 100 metros hacia el molino de viento y apuntamos nuevamente desde un punto B. El ángulo ahora se mide como 28°.

¿Qué altura tiene el molino de viento?

2B.06
La distancia entre los pilones del puente Great Belt es de 1624 metros. Las torres tienen una altura de 254 metros sobre el nivel medio del mar. El cable portador entre las cimas de los pilones tiene forma (casi) de parábola con el vértice a 77 metros sobre el nivel medio del mar. *(Datos de ref.: www.storebaelt.dk Aún, problemas y soluciones del autor).*

¿Cuál es la ecuación de la parábola si colocamos (0,0) en el vértice?

¿Cuál es la ecuación de la parábola si colocamos (0,0) al nivel promedio del mar justo debajo del vértice?

2B.07
La carretera entre los pilones del puente Great Belt tiene forma de curva circular con un radio de 45.000 metros. En el medio (a medio camino entre los pilones – en el punto M) la carretera se encuentra a 75 metros sobre el nivel medio del mar. *(Datos de ref.: www.storebaelt.dk Aún, problemas y soluciones del autor).*

¿Cuál es la ecuación del círculo de la carretera si colocamos a Origo (punto (0,0)) a 45 000 metros justo debajo del punto M?

¿Cuál es la ecuación del círculo de la carretera si colocamos a Origo (punto (0,0)) al nivel del mar justo debajo del punto M?

2B.08
Queremos diseñar un foco utilizando un reflector de parábola. Con un diámetro = 0,2 m en el borde y una altura = 0,3 m.

Corta el plato de la parábola 3D a lo largo de su línea central, coloca la parábola 2D en un sistema de coordenadas y determina la ecuación de la parábola.

2B.09
La Tierra tiene una circunferencia de 40.000 km de longitud y es casi esférica. Nos paramos en la playa con los ojos a 2 m sobre el nivel del mar y miramos hacia el horizonte. ¿A qué distancia está el horizonte?

¿A qué distancia podemos ver el horizonte si estamos a 40 m, 100 m, 1000 m sobre el mar?

2B.10
La Tierra tiene una circunferencia de 40.000 km de longitud y es casi esférica. Estamos en la playa con los ojos a 2 m sobre el nivel del mar y miramos una roca a 25 km al otro lado del estrecho.

¿Qué parte de las colinas no podemos ver (desde el mar hacia arriba)?

2B.11

Una oscilación electrónica sigue la función.

$f(x) = (\sin x)^2 + \sin x$

Donde solo consideramos un período: $0 \leq x \leq 2\pi$ rad

(o: x pertenece al intervalo $[0 ; 2\pi]$ – o: x ϵ $[0 ; 2\pi]$)

Encuentra las raíces en la ecuación para f(x) = 0

Dibuja la función en un diagrama. ¿Se encuentra conformidad con las raíces?

2B.12

Ahora consideramos la misma función que en 2B.11. Sin embargo, ahora consideramos tres períodos desde 0 rad hasta 6 π rad.

$f(x) = (\sin x)^2 + \sin x$ donde $0 \leq x \leq 6\pi$

Encuentra las raíces en la ecuación para f(x) = 0

Encuentre una forma "breve" de presentar todas las raíces.

Dibuja la función en un diagrama. ¿Se encuentra conformidad con las raíces?

2B.13

En algunas reacciones químicas, la velocidad de reacción se duplica cuando la temperatura aumenta 10°C.

¿Cómo cambiará la velocidad de reacción si la temperatura aumenta de 20°C a 100°C?

Haga un bosquejo aproximado de la curva de función en principio. ¿De qué tipo de función estamos hablando?

2B.14

La velocidad de reacción de una reacción química es función de la temperatura en el dominio de 20°C a 100°C de la siguiente manera:

Temp	20	30	40	50	60	70	80	90	100	°C
Rate	1	2	4	8	16	32	64	128	256	Factor

Determine la ecuación para: velocidad de reacción = f (temperatura) usando la prescripción $y = b \cdot c^x$

Resuelve por CAS o adivinando raíces durante el cálculo.

2B.15

En una prueba de laboratorio, el número de bacterias se desarrolla según

$$N(t) = 160 \cdot e^{0.5 \cdot t}$$

donde N es el número de bacterias y t es el tiempo en horas.

¿Cuántas bacterias hay al principio?

¿Cuándo se duplicará la cifra?

¿Cuándo hay 10 000 bacterias?

2B.16

Desde el primero de enero de 2015 hasta el 31 de diciembre de 2021 una fábrica aumentó la producción en un 4% anual.

¿Cuánto por ciento es eso en total?

2B.17
Una mujer hereda 20.000 libras de su tío, pero según el testamento tendrá que esperar 5 años antes de que le entreguen el dinero. Pregunta a su banco si puede prestarle una cantidad de dinero hoy y devolverla dentro de cinco años con las 20.000 libras. El banco cobra una tasa de interés del 6%.

¿Cuánto puede prestar?

2B.18
La concentración de algún medicamento en la sangre de un paciente se modela como:

$$f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$$

(Ecuación/datos de ref.: www.studieportalen.dk Aún, preguntas y soluciones del autor).

donde f(t) es la concentración en miligramos por litro y t es el tiempo en horas y $t > 0$

Dibuje la función en a t, conc. diagrama.

Leer la concentración máxima y el tiempo correspondiente.

2B.19
Un grupo con 100.000 bacterias crece exponencialmente y el número de bacterias se triplica en 45 minutos.
Determine la ecuación para el crecimiento.

¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?

2B.20
El valor de pH se define como “el log10 negativo de la concentración de protones/iones de hidrógeno” y describe la acidez de una solución química: $pH = -log[H^+]$

Los paréntesis significan "la concentración de" y la unidad de concentración es mol por litro.

¿Cuál es el valor de pH de:

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-7}$ $[H^+] = 1 \cdot 10^{-10}$

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-3}$ $[H^+] = 3 \cdot 10^{-5}$

2B.21
El valor de pH se define como “el log10 negativo de la concentración de protones/iones de hidrógeno” y describe la acidez de una solución química: $pH = -log[H^+]$

Los paréntesis significan "la concentración de" y la unidad de concentración es mol por litro.

pH = 7 es neutro.

El agua de lluvia normal y limpia tiene un valor de pH de aproximadamente 5,5. ¿Es esto ligeramente ácido o ligeramente básico?

¿Cuál es la concentración aproximada de iones de hidrógeno?

2B.22
El agua subterránea en zonas ricas en piedra caliza suele ser ligeramente básica, por ejemplo, pH = 7,8.

¿Cuál es la concentración aproximada de iones de hidrógeno?

Parte 3.

Diferenciación e Integración - ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales

3A.001

Diferenciar las funciones usando la notación para un coeficiente diferencial (= derivada), por ejemplo $\frac{d}{dx}f(x)$

$f(x) = -x^2 + 4x - 2$ $\qquad$ $g(x) = 8x^2 + x$

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8$ $\qquad$ $i(x) = 8x^2 - 1$

3A.002

Diferenciar las funciones usando la notación rápida, por ejemplo f´(x) para la derivada (= coeficiente diferencial):

$f(x) = 4x^2 + 2$ $\qquad$ $f(x) = -6x^2 - x$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ $\qquad$ $f(x) = -3x^2 - 1$

y determine f(1) y f´(1) de las funciones.
Aquí llamamos a todas las funciones f aunque son diferentes.

3A.003

Encuentra la ecuación para la pendiente tangente de la función.
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

y determina la ecuación de la tangente que pasa por el punto (2,-1) y haz un croquis.

3A.004

Dada la función $f(x) = 3x^2$
Encuentra la ecuación de la tangente con pendiente = 2

3A.005

Dada la función $f(x) = x^{½}$
Encuentra la ecuación de la tangente donde x = 9

3A.006

Diferenciar las funciones/expresiones.

$f(x) = 4x^2 + x^{½}$ $\quad$ $f(x) = x^{½} + 4x - 9$

$f(x) = x^{½}(x^{½} - 6)$ $\quad$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$

3A.007

Encuentra la parábola que pasa por P(0,0) y Q(4,4) , y con pendiente de la tangente = 3 en el punto Q.

3A.008

¿Dónde tiene $y = x^3 - 12x + 1$ tangentes horizontales?

3A.009

Tenemos dos funciones

$f(x) = x^2$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^{½} \quad for\ x \geq 0$

Dibuja las dos curvas en un diagrama y lee los puntos de intersección.

Calcula los puntos de intersección.

3A.010

¿Dónde se cruza la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 4$ con los ejes x e y?

Encuentra las ecuaciones de las tangentes en los puntos de intersección.

3A.011

Tenemos una parábola $f(x) = x^2$

Encuentra las ecuaciones de las dos tangentes que pasan por el punto P(1,-8)

3A.012

Determine el dominio para $f(x) = \frac{\mathrm{x}}{x+1}$

Encuentra las tangentes horizontales de la función y haz un croquis como control.

3A.013

¿La función $y = 3x^2 - 4$ tiene tangentes horizontales?

Si es así, ¿es un máximo o un mínimo?

3A.014

Dibuja la función $x \cdot y = k$ para k = 3 en un diagrama.

La curva compartida se llama hipérbola.

Deduzca del diagrama si la curva tiene tangente(s) o asíntota(s).

En los siguientes problemas consideraremos esto en detalle.

3A.015

¿La función $x \cdot y = \mathrm{k}$ tiene tangentes horizontales?

3A.016

¿La función $x \cdot y = \mathrm{k}$ tiene asíntotas horizontales?

3A.017

¿La función $x \cdot y = \mathrm{k}$ tiene tangentes verticales?

3A.018

¿La función $x \cdot y = \mathrm{k}$ tiene asíntotas verticales?

3A.019

¿La función $f(x) = (x^2 - 3x + 3)^{\frac{1}{3}}$ tiene tangente(s) horizontal(es)?

3A.020

Diferenciar las funciones compuestas:

$f(x) = (4x - 2)^3$ $\quad g(x) = (2x - 2)^{½}$ $\quad h(x) = (x^3 + x^2)^{½}$

$i(x) = (e^x - 3x)^5$ $\quad j(x) = (5^x + 2)^{-3}$ $\quad k(x) = xe^x$

3A.021

Diferenciar las funciones:

$f(x) = e^{3x}$ $\quad g(x) = 3^x$ $\quad h(x) = e^{3x+2}$

$i(x) = -7e^{2x}$ $\quad j(x) = ln(4x^3 + x^2)$ $\quad k(x) = x^2e^x$

3A.022

Diferenciar las funciones:

$y = ln\, x$ $\quad y = \frac{1}{x}$ $\quad y = \frac{ln\, \mathrm{x}}{x^2}$ $\quad y = \frac{x^2}{lnx}$

3A.023

Encuentre los puntos donde $f(x) = 4ln\, x - (lnx)^4 \quad y \quad x > 0$ intersecta el eje x.

¿Dónde tiene un máximo la función?

Haz un boceto para comprobarlo.

3A.024

Diferenciar las funciones usando la notación rápida, por ejemplo f´(x) para la derivada (= coeficiente diferencial):

$f(x) = \sin x - \cos x$

$g(x) = 4\cos x + 2x - 8$

$h(x) = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

$i(x) = 4\tan x + 2$

3A.025

Ahora llamamos a todas las funciones y. Esto no es muy específico, pero está permitido si no se puede malinterpretar.

Diferenciar las funciones usando la notación para el coeficiente diferencial real $\frac{dy}{dx}$

$y = \cos 2x$

$y = sin\frac{1}{x}$

$y = sin(x^2 + x)$

$y = (\sin x)^4$

$y = sin\, x^4$

$y = 2(\tan x)^2$

3A.026

Diferenciar las funciones:

$y = sin\, x \cdot sin\, x$

$y = (cos\, x)^2$

$y = 2sin\, x - \frac{1}{2}cos\, x$

$y = 3tanx + 4$

3A.027

Nosotras tenemos una oscilación sinusoidal

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3) + 0.5$

y quiero determinar máx. y mín. de la función y el rango, utilizando dos métodos diferentes.

Finalmente, haz un boceto para comprobarlo.

3A.028

Hemos encontrado un (sólo un) punto extremo de una función/curva.

Considere cómo determinar si es un máximo o un mínimo sin hacer un boceto.

3A.029

Hemos encontrado un punto de una función/curva donde y´ = 0

Considere cómo determinar si es un máximo, un mínimo o una pausa sin dibujar un diagrama fino. 

3A.030

La función $y = 2x^2$ tiene un extremo en (0,0) , pero ¿es un máximo o un mínimo? Resuelve usando la segunda derivada y luego dibuja la curva.

3A.031

La función $y = -2x^2$ tiene un extremo en (0,0) , pero ¿es un máximo o un mínimo? Resuelve usando la segunda derivada y luego dibuja la curva.

3A.032

Integrar las funciones previamente diferenciadas:

$f'(x) = 4x + 1$ $\qquad$ $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$h'(x) = -x - \frac{4}{x^2}$ $\qquad$ $i'(x) = 4x^{-5}$

$j'(x) = \frac{1}{x^{½}} \quad y \quad x > 0$ $\qquad$ $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad y \quad x > 0$

3A.033

Integrar para encontrar las funciones base:

$f(x) = 0$ $\qquad$ $g(x) = 1$ $\qquad$ $h(x) = 2\pi$

$i(x) = \frac{5}{x^{½}} \quad y \quad x > 0$ $\qquad$ $j(x) = 8x^3 + 6x^{-4} - \frac{6}{x^6}$

$k(x) = 2e^x$

3A.034

Integrar las funciones previamente diferenciadas:

$f'(x) = 2x - 9$ $\qquad$ $g'(x) = x^{-6} - \frac{1}{x}$ $\qquad$ $h'(x) = 15^x$

3A.035

Integrar para encontrar las funciones base:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ $\qquad$ $g(x) = (2x + 3)^2$ $\qquad$ $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

3A.036

Nosotras tenemos las funciones

$f(x) = 2x + 3$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $h(x) = 4x^3 + 2x$

Encuentra las funciones base, pasando por el punto (2,0)

3A.037

Nosotras tenemos una funcion $\quad f(x) = x^{-2} \quad y \quad x > 0$

Encuentre F(x) sabiendo que F(16) = 16

3A.038

Nosotras tenemos una funcion $\quad f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x - 1$

Encuentra la funcione base, pasando por el punto (1,8)

3A.039

Demuestre que $F(x) = x + \sin x \cdot \cos x$ es la función base de

$f(x) = 2(\cos x)^2$

3A.040

Calcular las integrales por sustitución.

$\int (2x-3)^3\, dx$ $\qquad$ $\int x(4x^2-1)^4\, dx$

3A.041

Calcular las integrales usando la integración por partes.

$\int \sin 2x \cdot x \ dx$ $\int sin\, x \cdot x^2 \, dx$

En la segunda integral puedes considerar hacer la integración parcial dos veces.

3A.042

Calcular las integrales específicas

$\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2) \, dx$ $\int_0^2 (x^2 + 1) \, dx$

3A.043

Calcular las integrales específicas

$\int_0^5 (y^2 - 2y) \, dy$ $\int_0^\pi \sin u \, du$

3A.044

Calcular las integrales específicas

$\int_0^1 (x^2 + 1) x^{½} \, dx \quad y \quad x \geq 0$ $\int_0^\pi (sin\, x + x) \, dx$

3A.045

Calcular las integrales específicas

$\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2) \, dx$ $\int_0^2 (x^2 + 1) \, dx$

3A.046

Calcular las integrales específicas

$\int_0^1 (x^2+1)x^{½}\,dx \quad y \quad x > 0$ $\qquad \int_0^{\pi} (\sin x + x)\,dx$

3A.047

Calcular las integrales específicas

$\int_{-½}^{0} (y+1)^2\,dy$ $\qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{(6-3y)^2}\,dy$

3A.048

Calcular las integrales específicas

$\int_{-2}^{-1} (y+1)^2\,dy$ $\qquad \int_{-2}^{-1} (y+1)^2\,dx$

3A.049

Calcular la integrale específica $\int_0^{\pi} (\sin\frac{x}{2} + \cos 2x)\,dx$

(eventualmente dividiendo en dos integrales separadas y luego usando sustitución).

3A.050

Calcular la integral específica $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\cdot \cos x\,dx$

3A.051

Calcular la integral específica $\int_0^{\pi} (1+x) \cdot cos\, x\, dx$

3A.052

Calcular la integral específica $\int_1^2 x^3 \cdot ln\, x\ dx \quad y \quad x > 0$

3A.053

Calcular la integral específica $\int_1^2 x(x-1)^4\, dx$

3A.054

Calcular la integral específica $\int_1^9 \frac{ln\, x}{\sqrt{x}}\, dx \quad y \quad x > 0$

3A.055

Calcular la integral específica $\int_1^4 \frac{3^{x^{½}}}{x^{½}}\, dx \quad y \quad x > 0$

3A.056

Encontrar a en $\int_0^a (2y+4)\, dy = 0 \qquad \int_0^a (-6y+2)\, dy = 0$

3A.057

Encontrar a en $\int_1^2 ax\, dx = 10$

3A.058

Encontrar a en $\int_1^a \sin t \, dt = 1$ por un período. (a es un ángulo en radianes)

Dibuja un período de la función en un diagrama. Si la integral describe un área, ¿dónde se ubicaría esa área en el diagrama?

3A.059

Las funciones $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x + 1$ y $g(x) = \frac{3}{4}x + 1$

se cruzan y forman dos áreas. Encuentra la suma de estas dos áreas y haz un boceto.

3A.060

Calcula el área entre el eje x y la función

$y = 1 - x^2$

3A.061

Calcula el área entre la recta y = 1 y la función.

$y = -x^2 + 5x + 1$

Empiece por hacer un boceto.

3A.062

Dibuja y calcula el área entre

x = 0 x = 4 y = 0 y = 6 $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$

3A.063

Consideramos la función sinus $y = \sin x$
Dibuja y calcula el área entre la curva y el eje x entre
$x = 0 \quad y \quad x = \frac{\pi}{4}$
Luego encuentra x = a valor que divide esta área en dos áreas más pequeñas de igual tamaño.

3A.064

Nosotras tenemos una funcion $y = x^4 \quad y \quad x \geq 0$

Determina la función inversa.

Dibuja las dos funciones en el primer cuadrante y encuentra el área entre las curvas.

Finalmente, encuentre el volumen para esta área rotada alrededor del eje x.

3A.065

Se forma un área entre la parábola $y = x^2 + 2$ y el eje x con x de -1 a 2

Calcule el volumen de esta área girada alrededor del eje x.

3A.066

Calcule el volumen al girar alrededor del eje y para:

$y = \frac{1}{3}x$ y x de 2 a 4

$y = \sqrt{x} = x^{½}$ y x de 0 a 1

3A.067

Calcule el volumen al girar alrededor del eje y para:

$y = x^{-\frac{3}{2}}$ y x de 2 a 4

3A.068

Calcule el volumen al rotar el área entre las dos curvas/funciones.

$f(x) = 2x^2 \quad y \quad g(x) = 2x$ alrededor del eje y.

3A.069

Calcula el volumen al rotar el área entre las dos curvas/funciones en el primer cuadrante

$f(x) = x^2 + 2 \quad y \quad g(x) = x + 4$ alrededor del eje y.

3A.070

Un segmento de recta corre entre dos puntos con las coordenadas (20,50) y (40,50). El segmento de línea se gira alrededor del eje x para formar la parte central/neutra de una correa plana.

¿Cuál es el área de superficie del cinturón a lo largo de la línea neutral?

El espesor del cinturón es 3. ¿Cuál es el área de la sección transversal?

El cinturón está hecho de goma. ¿Cuál es el volumen de la goma?

3A.071

¿Cuál es el volumen de una junta tórica en forma de toroide (rosquilla) con $r = 8$ y $R = 80$?

3A.072

¿Cuánto mide la curva de $x = 0$ a $x = 2$ en la función?

$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

3A.073

¿Cuánto mide la curva de $x = 0$ a $x = 2$ en la función?

$y = x^2$ Resolver por CAS.

3A.074

¿Cuánto mide la curva de $x = 0$ a $x = 2$ en la función?

$y = \sin x$ Resolver por CAS.

3A.075

Encuentra y desde $\frac{dy}{dx} = 2y$ No utilice el "Teorema 0"

Luego encuentra y desde $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{8}y$ No utilice el “Teorema 0”

3A.076

Encuentra y desde $\frac{dy}{dx} = x^2$ y determinar c para x = 2 y y = 3

3A.077

Encuentre la solución indeterminada para y en $\frac{dy}{dx} - y = 2$

Luego encuentre la solución específica para la función/curva que pasa por el punto (x,y) = (10, −2)

3A.078

Encuentre la solución indeterminada para y en $\frac{dy}{dx} - 3y = -2$

Luego encuentre la solución específica para la función/curva que pasa por el punto (x,y) = (ln 4, $-\frac{2}{3}$)

3A.079

Encuentre la solución indeterminada para y en $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0$

Luego encuentre la solución específica para la función/curva que pasa por el punto (x,y) = (ln 2, ln 3)

Se acepta simplificar utilizando números decimales en algún momento.

3A.080

Encuentre la solución indeterminada para y en $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0$

Luego encuentre la solución específica para la función/curva que pasa por el punto (x,y) = (ln 16, ln e)

Se acepta simplificar utilizando números decimales en algún momento.

3A.081

Encuentra y desde $\frac{dy}{dx} = 2y$ usando el “Teorema 0”

3A.082

Encuentra y desde $\frac{dy}{dx} = y^2$ usando el “Teorema 0”, y controle insertando la solución en la ecuación original ($\frac{dy}{dx} = y^2$)
Luego control por CAS.

3A.083

Resuelva $y' = -2y + 2e^x$ indeterminadamente,
y luego específicamente para (x,y) = (0,0)

3A.084

Encuentra y desde $y' = xy + x$

3A.085

Encuentra y desde $y' = xy$

3A.086

Se espera que un parque nacional pueda convertirse en el hábitat de 200 alces. Se liberan 20 alces y se espera que el crecimiento sea logístico con una constante proporcional de 0,001.

Encuentra la función y calcula cuándo se esperan 50, 100 y 199 alces en el parque.

3A.087

La ecuación diferencial $y' = y + 2x$ *1.*

tiene la solución completa/indeterminada

$y = -2x - 2 + ce^x$ *2.*

Utilice CAS avanzado para mostrar el campo de flujo (= estudio de posibles soluciones) de esta ecuación diferencial (1.)

Utilice la ecuación resuelta (2.) para señalar la curva solución para c = 0 en el mismo diagrama – o (si no tiene CAS adecuado) simplemente explique dónde se encuentra.

3A.088

Encuentra cómo cambia z con x en la función $z = x^2 + y^3$

(Es decir, encontrar la derivada $\frac{\partial z}{\partial x}$)

Entonces busca. $\frac{\partial z}{\partial y}$

Dibuje la función usando CAS y léala para verificarla.

3A.089

Nosotras tenemos una funcion

$z = \frac{4}{3}x^3 + y - x - y^{½}$ e $y \geq 0$

Encuentra las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

¿Para qué valores de xey es $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$? Utilice CAS para dibujar la función en un diagrama 3D y compararla.

3A.090

Nosotras tenemos una funcion $x - y = \frac{x}{z}$ y $z \geq 0$

¿Cómo cambia z cuando cambia y?

3A.091

Nosotras tenemos una funcion $z = \cos(xy)$

¿Cómo cambia z cuando cambia y?

3A.092

Nosotras tenemos una funcion 3D $z = 2x^2 + 3y^2$

Encuentre una expresión para la pendiente en la dirección x y para la pendiente en la dirección y.

Encuentre la coordenada z para x = 1 e y = 5 y escriba las tres coordenadas como (x,y,z) =….

Encuentre una expresión para la pendiente en la dirección x y para la pendiente en la dirección y.

Encuentre la coordenada z para $x = 1$ e $y = 5$ y escriba las tres coordenadas como (x,y,z) =….

Encuentra el gradiente y su tamaño en este punto.

3A.093

Nosotras tenemos una funcion 3D $z = \sin x - \cos y$

Encuentre una expresión para la pendiente en la dirección x y para la pendiente en la dirección y.

Encuentre la coordenada z para $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ e escriba las tres coordenadas como (x,y,z) =….

Encuentra el gradiente y su tamaño en este punto.

3A.094

Utilice CAS para mostrar la función $f(x,y) = z = x^3 - 5y^2$

Así como la curva de nivel de $f(x,y) = z = x^3 - 5y^2$

3A.095

La función $f(x,y) = z = x^2 + y^2$
tiene un extremo en el punto (0,0,0), pero ¿es un máximo o un mínimo?

Resuelva usando la segunda derivada y luego dibuje la curva usando CAS.

3A.096

La función $f(x,y) = z = -x^2 - y^2$ tiene un extremo en el punto (0,0,0), pero ¿es un máximo o un mínimo?

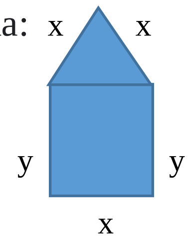
Resuelva usando la segunda derivada y luego dibuje la curva usando CAS.

Parte 3. Diferenciación e Integración - ejercicios

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas

3B.001

Las ventanas de un edificio especial tienen forma:



¿Cuál es el perímetro?

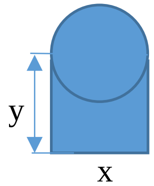
¿Cuál es el área?

Encuentre x e y para el área máxima cuando el perímetro es de 10 metros.

3B.002

Las ventanas de un edificio antiguo tienen forma

con un semicírculo como marco superior.



Encuentre x e y para el área máxima cuando el perímetro es de 10 metros.

3B.003

Los gastos para producir un determinado producto se estiman en:

$E = 9000 + 50x + x^2 \quad para\ \ 1 \leq x \leq 400$

donde x es el número de artículos y E son los gastos en libras.

¿Qué parte de la ecuación describe los costos fijos?

¿Qué parte de la ecuación describe los costos variables?

Encuentre la ecuación que expresa el gasto por artículo.

Dibuje el gasto por artículo en función del número de artículos.

3B.004

Los gastos para producir un determinado producto se estiman en:

$$E = 9000 + 50x + x^2 \quad para \;\; 1 \leq x \leq 400$$

donde x es el número de artículos y E son los gastos en libras.

Encuentre la ecuación que expresa el gasto por artículo.

Determinar mediante cálculo el número de artículos x que tiene el gasto mínimo por artículo.

Se acepta vender el artículo no. 400 sin fines de lucro. ¿A qué precio de venta corresponde esto?

3B.005

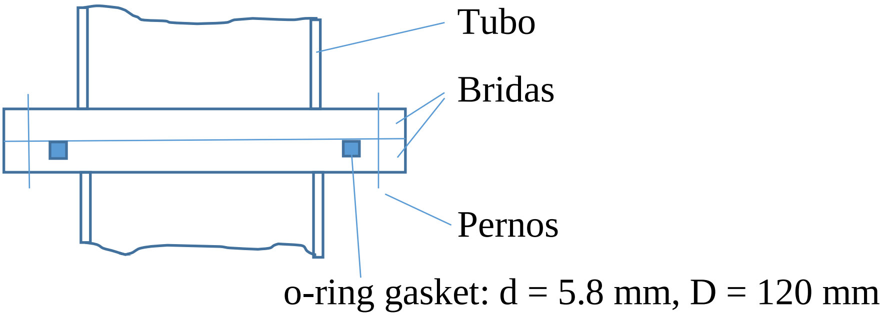
Un carrete tiene un radio central r = 40 mm y un radio de llanta R = 400 mm. La cinta de película tiene un espesor de 0,2 mm.

¿Cuantos metros de cinta de film puede tener el carrete?

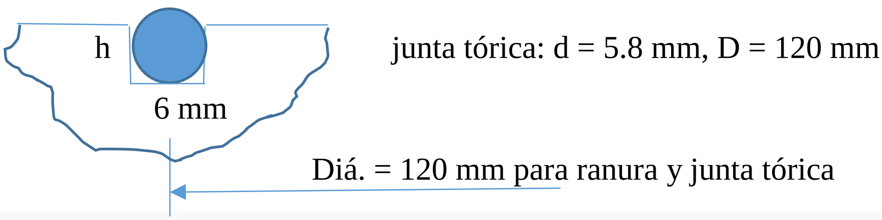
Primero resuelva mediante matemáticas estándar. Luego, aunque sea difícil, intenta resolverlo con cálculo integral.

3B.006

Un conjunto de brida en una tubería de agua se sella con una junta tórica que se sujeta en una ranura circular de forma rectangular:



Ranura transversal detallada y junta tórica antes del montaje:



El ancho por la altura de la ranura es $6 \cdot h$

El diámetro de la línea central de la junta tórica es D = 120 mm

El volumen de la junta tórica será el 98% del volumen de las ranuras.

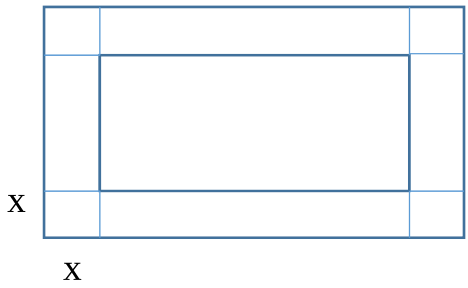
Determine la altura de la ranura, h.

3B.007

Se va a fabricar una bandeja rectangular con una placa de acero:

largo por ancho $= 450$ mm $\cdot$ 300 mm

En las cuatro esquinas se cortan cuadrados iguales y se doblan y sueldan los lados.



Encuentra la x que da la bandeja más grande.

3B.008
Se va a fabricar un cubo de pintura cilíndrico de 2 litros con tapa gastando la menor cantidad de plástico posible.

¿Qué altura y diámetro cumplirán esto?

¿Cuál será el área de superficie del balde? (Se ignora el espesor de la placa).

3B.009
El cubo de la hélice de un barco (es decir, sin las palas de la hélice) tiene forma de parábola. La altura desde la base al vértice es de 5 dm (decímetro) y tiene un diámetro de 4 dm en la base. En la base hay un orificio cilíndrico situado en el centro para el montaje con el eje. El agujero tiene un diámetro de 1,2 dm y una profundidad de 2,5 dm.

¿Cuál es el volumen del centro?

La hélice está hecha de bronce con una densidad de 8800 kilogramos por metro cúbico.

Encuentra la masa del cubo.

3B.010

Cierta reacción química tiene una velocidad de reacción proporcional a la cantidad (masa) de materia, M.

Escribe una ecuación diferencial para describir la reacción.

Se midió que al inicio (tiempo = cero) hay M_0 = 90 miligramos y después de 60 minutos hay M_{60} = 20 mg.

Resuelve la ecuación diferencial con respecto a M.

3B.011

Otra reacción química determinada tiene una velocidad de reacción proporcional a la cantidad (masa) de materia elevada a 2, M^2.

Escribe una ecuación diferencial para describir la reacción.

Se midió que al inicio (tiempo = cero) hay M_0 = 90 miligramos y después de 40 minutos hay M_{40} = 20 mg.

Resuelve la ecuación diferencial con respecto a M.

3B.012

Una tercera reacción química cierta tiene una velocidad de reacción proporcional a la cantidad (masa) de materia elevada a 3, M^3.

Escribe una ecuación diferencial para describir la reacción.

Se midió que al inicio (tiempo = cero) hay M_0 = 90 miligramos y después de 20 minutos hay M_{20} = 20 mg.

Resuelve la ecuación diferencial con respecto a M.

3B.013

La desintegración natural del material radiactivo sigue la ecuación diferencial.

$\frac{dM}{dt} = -kM$ donde M es la masa del material radiactivo y t es el tiempo.

Una momia llamada Hombre Grauballe tenía un contenido de carbono 14 establecido en 100%, o 1, cuando murió. Hoy es el 76%, o 0,76. El tiempo de reducción a la mitad del C-14 es de 5730 años.

¿Cuando murió él?

3B.014

$\frac{dh}{dt} = 0.17 \cdot h$ es el modelo simplificado para el crecimiento de una determinada variedad de césped. Es válido para época de verano y lluvia normal, y desde altura = h = 3 cm hasta 9 cm. Es el tiempo en días.

¿Cuánto tiempo se tarda en crecer desde h = 3 cm hasta h = 9 cm?

Puede resolverse de forma indeterminada determinando c, - o puede resolverse de forma determinada utilizando límites.

3B.015

La concentración de un determinado medicamento en la sangre de un paciente se modela como $f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$

donde f(t) es la concentración en miligramos por litro y t es el tiempo en horas.

(Ecuación/datos de ref.: www.studieportalen.dk Aún, preguntas y soluciones del autor).

Dibuja la función en un diagrama.

Calcula el tiempo y la concentración al máximo.

3B.016

La ecuación diferencial del lanzamiento de un cohete.

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} v = \frac{300}{15-t} - 9.81 \quad para \quad 0 \leq t \leq 14\ seconds$$

(Ecuación/datos de ref.: www.studieportalen.dk Aún, preguntas y soluciones del autor).

se mencionó en el libro de texto, donde encontramos una velocidad: v = 3101 metros por segundo después de 14 segundos.

¿Cuál es la aceleración promedio durante estos 14 segundos?

¿Cuánto es esto en comparación con la aceleración de la gravitación en la Tierra (g ≈ 9,81 m/s2)?

¿Crees que ese hombre puede soportar esto?

¿Este cohete está destinado únicamente al hombre o al equipo?

3B.017

El cultivo de un determinado cultivo se puede modelar como

$$\frac{dM}{dx} = 0.000369 \cdot M(15.5 - M) \quad para \quad 0 \leq x \leq 1000$$

(Ecuación/datos de ref.: www.studieportalen.dk Aún, preguntas y soluciones del autor).

donde M es el rendimiento en toneladas y x es la cantidad de fertilizante en kg. Se sabe que para producir 13,1 toneladas se necesitan 400 kg de fertilizante.

Encuentre la ecuación para M(x).

El precio de venta de 1 tonelada es de 100 libras y 1 kg de fertilizante cuesta 0,28 libras.

Encuentre una expresión/ecuación para la ganancia.

Trace la ganancia en función de x.

Lea el valor x aproximado para obtener el máximo beneficio.

3B.018

La longitud de un determinado pez se puede modelar como

$$\frac{dL}{dt} = k(100 - L)$$

(Ecuación/datos de ref.: www.studieportalen.dk Aún, preguntas y soluciones del autor).

donde L es la longitud en cm y t es el tiempo en años.

Se sabe que L = 0,4 cm para t = 0 y L = 11 cm para t = 1

¿Cuánto puede llegar a medir un pez como máximo?

Encuentre L(t)

Por lo general, este pez se captura con tallas en el intervalo [40 ; 60]cm.

¿Cuál es el intervalo de edad correspondiente?

Parte 4. Vectores – ejercicios

Sección A – problemas matemáticos tradicionales

4A.001

Tenemos dos vectores $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$  $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$ 

Dibuje el vector resultante y encuentre sus coordenadas para

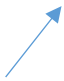
a + b **b + a** **a – b** **b - a**

4A.002

Escribe $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ y $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

usando los vectores base **i** y **j** y encuentra sus longitudes.

4A.003

Tenemos dos vectores $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$  $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$ 

Multiplica **a** por 4 y dibuja el resultado.

Multiplica **b** por -3 y dibuja el resultado.

4A.004

Dibuje dos vectores **a** y **b**.

Dibuja los vectores: -3**a** 2**a** 2**a** - **b** 3**a** +2**b**

Dibuje **p** de modo que: **a + b + p = o** (el vector cero, nada)

4A.005

Tenemos dos vectores $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

Dibuje los dos vectores que comienzan en el punto Origo: (0,0)

Calcule el producto escalar (el producto escalar).

Calcula el ángulo entre ellos.

4A.006

Tenemos dos vectores $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

Dibuje los dos vectores que comienzan en el punto Origo: (0,0)

Calcula el determinante.

Calcula el ángulo entre ellos.

4A.007

Tenemos dos vectores $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

Encuentra el área del paralelogramo y del triángulo, expandido por **a** y **b**

4A.008

Tenemos dos vectores $\boldsymbol{a} = \binom{4}{6}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

Haz un boceto de **a** proyectado sobre **b**.

Encuentra las coordenadas y la longitud del vector proyectado.

4A.009

Una recta pasa por el punto (4,7) y tiene un vector director $\binom{1}{2}$

Escribe la línea recta en forma vectorial.

¿Cuál es la pendiente de la recta y dónde se cruza con el eje y?

4A.010

Tenemos una recta como función vectorial $\binom{x}{y} = \binom{4}{7} + t\binom{1}{2}$

Escribe la función en las dos formas tradicionales:

$y = a(x - x_1) + y_1 \quad y \quad y = ax + b$

donde a es la pendiente y b es y para x = 0

Además, escriba la función en forma vectorial usando un vector normal:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad and \quad ax + by + c = 0$

donde a y b son las coordenadas de un vector normal.

4A.011

Calcule el vector unitario en la dirección del vector $\boldsymbol{a} = \binom{-12}{-5}$ así como para su vector transversal.

4A.012

Comprueba si el triángulo ABC con A(-2,0) B(6,4) C(2,-3) es rectángulo.

4A.013

Calcula los ángulos del triángulo ABC donde A(3,1) B(1,-1) y C(-1,-2)

Dibuja el triángulo.

4A.014

Calcula la proyección de $\boldsymbol{a} = \binom{6}{2}$ sobre la recta que pasa por A(5.7) y B(12,2) y haz un boceto.

4A.015

Encuentra la distancia entre el punto (10,10) y la recta:

$$-2x + y + 1 = 0$$

4A.016

Encuentra la distancia entre el punto (-12,-8) y la recta:

$$\binom{x}{y} = \binom{-4}{-4} + t\binom{2}{3}$$

4A.017

Escriba el punto P(5,5) como un vector de posición usando vectores base y luego en coordenadas polares.

4A.018

Escriba el punto Q(-5,-5) como un vector de posición usando vectores base, y luego en coordenadas polares, y haga un boceto.

4A.019

Utilice CAS para dibujar la función vectorial $\boldsymbol{r}(t) = \binom{x}{y} = \binom{t^2}{t^3 - t}$ Determina el punto doble.

Además, determine los puntos con tangentes verticales y horizontales usando números decimales.

4A.020

Utilice CAS para dibujar la función vectorial $\boldsymbol{r}(t) = \binom{x}{y} = \binom{t^3 - t}{t}$ Determina el punto doble.

Además, determine los puntos con tangentes verticales y horizontales usando números decimales.

4A.021

Tenemos dos vectores 3D $\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Encontrar: **a + b** **a – b** t · **a** |**a**|

4A.022

Tenemos dos vectores 3D $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Encontrar: |**a**| |**b**| **a + b** |**a + b**| **a – b** |**a – b**|

2**b – a** |2**b – a**|

4A.023

Son $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix}$ ortogonal?

4A.024

Escriba el punto (x,y,z) = (6,4,-3) como un vector de posición **OP** con coordenadas y usando vectores base: (**i, j, k**)

4A.025

Encuentra el vector opuesto a $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y comprueba la respuesta.

4A.026

Tenemos un vector $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Determinar el vector -2**a**

4A.027

Dados dos vectores $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Encuentre t para que **a** y **b** sean ortogonales.

4A.028

Dados dos vectores $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$

Encuentre t para que **a** y **b** sean ortogonales.

4A.029

Divide el vector $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ en tres componentes en las direcciones x, y, z.

4A.030

Tres puntos forman un triángulo en un sistema de coordenadas 3D:

P(2, 4, -1) Q(-3, 6, 4) R(3, -2, -3)

¿Cuánto miden los lados y cuáles son los ángulos de las esquinas?

4A.031

Tres puntos forman un triángulo en un sistema de coordenadas 3D:

P(3, 4, -1) Q(-2, 6, 4) R(4, -2, -3)

¿Cuánto miden los lados?

Encuentra los puntos medios de los tres lados.

4A.032

Escribe la función vectorial de la recta que pasa por los puntos P(2, -1, 4) y Q(-3, 4, 7)

4A.033

¿La línea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ interseca el eje x, y o z?

4A.034

¿Está el punto (3, -1, 7) ubicado en la recta? $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

4A.035

¿ Está el punto $(3, 1, 7)$ ubicado en la recta? $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

4A.036

Considere lo que se debe cumplir para que dos líneas 3D se crucen.

Luego resuelve:

Haz las líneas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$ y

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 26 \\ -11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$ ¿se cruzan?

Si es así, ¿en qué coordenadas?

4A.037

Haz las líneas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ¿se cruzan?

Si es así, ¿en qué coordenadas?

4A.038

Una recta pasa por el punto A(-1, 3, 5) y B(3, t, 8). un plano es x + 2y + 4z + 12 = 0

Determine t de manera que la recta que pasa por A y B sea paralela al plano.

4A.039

Tenemos dos planos llamados α y β:

α: $4x - 8y + 6z = 2$ β: $-5x - 10y - 10z = 2$

¿Son los planos paralelos?

¿Dónde se cruzan con el eje z?

4A.040

Escribe las ecuaciones de los tres planos α, β, γ donde

$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y un punto en α es (2, 2, 3)

$\boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y un punto en β es (-2, -2, -3)

$\boldsymbol{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y un punto en γ es (6, 1, -2)

4A.041

Tenemos un plano α: $2x - 5y + 4z = 2$

Escribe un vector normal para el plano.

¿Está el punto (1, 1, 1) en el plano?

¿Es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector normal a α, o tal vez paralelo?

¿Dónde interseca α los ejes?

4A.042

Dados dos vectores $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$

Encuentre t para que **a** y **b** sean ortogonales.

4A.043

Un plano α tiene tres puntos conocidos A(1, -1, 2) B(0, 2, 0) C(4, 2, 1)

Determina la ecuación del plano.

4A.044

Un plano β tiene tres puntos conocidos D(-1, 1, -2) E(0, -2, 0) F(-4, -2, -1)

Determina la ecuación del avión.

¿Está el punto (0, -2, 0) en el avión?

4A.045

Encuentra el área del triángulo y el paralelogramo expandido por

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4A.046

Encuentra el área del triángulo con vértices en

A(1, 1, 1)   B(1, 2, 3)   C(3, 1, 2)

4A.047

Encuentra el ángulo entre los planos

α: $3x + 3y - z + 4 = 0$ β: $3x + 4y + 2z - 4 = 0$

4A.048

Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre la línea

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y plano $3x + 3y - z + 4 = 0$

4A.049

Encuentra la recta que pasa por los puntos P(1, 2, 3) y Q(4, 5, 6)

Luego encuentra el ángulo entre esta recta y el plano

$4x - y + 2z - 6 = 0$

4A.050

Encuentre el plano β que pasa por el punto (5, 3, 1) y es paralelo al plano

α: $x + 3y - z - 5 = 0$

4A.051

Encuentra la distancia desde el punto P(6, 0, 2) al plano

α: $6x + 3y + 2z = 5$

4A.052

Encuentra tanto el ángulo agudo como el ángulo obtuso entre los planos

α: $2x - 3y + z = 8$ β: $2x + y - 4z = -8$

4A.053

Encuentre la distancia desde el punto P(3, 7, 2) al plano

α: $3(x - 1) + 2(y + 5) - 2(z - 2) = 0$

4A.054

Una esfera tiene centro en (-9, 9, -11) y radio = 12.

¿Es el plano 2x + y + 2z = 5 un plano tangente a la esfera?

Si es así, determine el punto de contacto.

4A.055

Encuentre la distancia entre el punto (1, 1, 1) y una recta que pasa por los puntos (2, 1, 2) y (3, 3, 3)

4A.056

Encuentra la distancia entre las líneas:

l: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ m: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

4A.057

Encuentra la distancia entre los dos planos paralelos

α: $x + 3y - z - 5 = 0$ β: $x + 3y - z - 10 = 0$

4A.058

Una recta pasa por los puntos P(1, 2, 3) y Q(4, 6, 8)

Encuentra la ecuación del parámetro de la recta.

Un avión tiene la ecuación $4(x-1) - 1(y-1) + 2(z-1) = 0$

Encuentra el ángulo entre la línea y el plano.

4A.059

Tenemos un plano α: $3x + 2y + z = 6$

Encuentra los puntos de intersección A, B y C con los tres ejes.

Calcula el área del triángulo ABC.

Proyecta Origo (punto (0, 0, 0)) sobre α y encuentra las coordenadas.

4A.060

Nosotras tenemos dos planos no paralelos

α: $x+y+z=0$ β: $2x+3y-2z=3$

Encuentra la función vectorial de la línea de intersección.

4A.061

Nosotras tenemos un plano α: $3x+12y-4z=-6$

y una esfera $x^2+y^2+z^2+10z=-24$

Encuentra el centro C y el radio r de la esfera.

Encuentra la distancia de C a α

Encuentre la proyección de C sobre α

4A.062

Tenemos una esfera $x^2+y^2+z^2-6x-6y-4z-3=0$

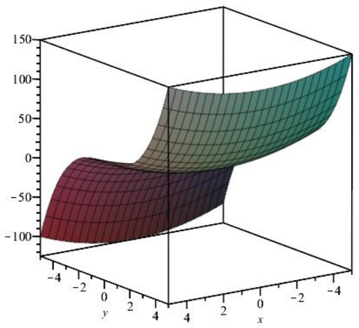
Y una linea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Encuentra el centro C y el radio r de la esfera.

Encuentre los dos puntos de intersección línea-esfera (Q_1, Q_2) usando números decimales.

4A.063

Tenemos una función $z = x^2 + y^3$ que muestra:

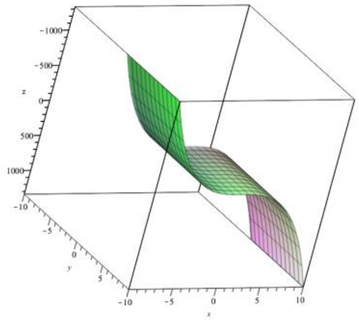


Encuentra la ecuación del plano tangente en el punto (0, 5, 125)

(La función también se usó en el problema 3A.088 y podemos usar las derivadas a partir de ahí o, por supuesto, calcular desde cero).

4A.064

Tenemos una función $z = \frac{4}{3}x^3 + y - x - y^{½} \quad e \quad y \geq 0$



Encuentra la ecuación del plano tangente en el punto (9, 4, 965)

(La función también se usó en el problema 3A.089 y podemos usar las derivadas a partir de ahí o, por supuesto, calcular desde cero).

Parte 4. Vectores – ejercicios

Sección B – problemas de matemáticas aplicadas

4B.01

Una pared de una habitación tiene cuatro esquinas A, B, C, D. Los ángulos A y B miden 90°. Las longitudes son |AB| = 14 metros, |BC| = 14 m, |CD| = 14,1 m.

¿Cuánto dura |AD|?

¿Qué tan grandes son los ángulos C y D?

4B.02

Una pared de un edificio está representada por un vector $\binom{0}{4000}$ y otra pared está representada por un vector $\binom{800}{5}$

¿Cuál es el ángulo entre las dos paredes?

4B.03

La placa base de una escalera es rectangular y está representada por los dos vectores:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ con longitudes en metros yz es vertical.

¿Qué tamaño tiene el área de la placa base?

¿Cuál es el ángulo con la horizontal?

4B.04

Un edificio mide 6 m de ancho, 7 m de largo y 5 m de alto.

Determine los ángulos entre la diagonal y los tres bordes en las direcciones **i, j, k**.

4B.05

Según un sistema de coordenadas local, la parte inferior de un paso elevado de ferrocarril sigue una línea recta que pasa por el punto (90, 90, 8) y tiene el vector de dirección $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. La parte superior de un camino rural sigue una línea recta que pasa por el punto (60, 70, 3) y tiene un vector de dirección $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. La dirección z es vertical.

¿En qué coordenadas (x, y) se cruzarán?

¿Cuál es la distancia z en el cruce?

4B.06

Según un sistema de coordenadas local, la parte inferior de un nuevo paso elevado de ferrocarril seguirá una línea recta que pasa por el punto (90, 90, 8) y tiene el vector de dirección $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La parte superior de una carretera rural existente sigue una línea recta que pasa por el punto (60, 70, 3) y tiene un vector de dirección $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. La dirección z es vertical.

Determine h para una distancia vertical de 5,5 metros en el cruce.

4B.07
La superficie de un techo se encuentra en un plano con la ecuación

$$x + 0 \cdot y - \frac{3}{4}z = 0$$

La línea central de un conducto de ventilación tiene la ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{z es vertical}$$

¿En qué punto la línea central del conducto cortará la superficie del techo?

¿Cuál es el ángulo del conducto con respecto a la horizontal?

¿Cuál es el ángulo del techo con respecto a la horizontal?

4B.08
Un barco navega directamente hacia el norte con una velocidad de 8 metros por segundo. Aparece una corriente en el agua en dirección este-oeste y aplica una velocidad portadora de 1 metro por segundo en el barco.

Si no se corrige: ¿Cuál será la nueva velocidad y dirección del barco?

Entonces se produce un viento del noroeste con una velocidad portadora de 2 metros por segundo. Si esto tampoco se corrige, ¿cuáles serán la velocidad y dirección reales del barco?

4B.09
Un pequeño avión vuela directamente hacia el sur con una velocidad de 80 metros por segundo. Aparece un viento en

dirección oeste-este y aplica una velocidad portadora de 4 metros por segundo sobre el avión.

Si no se corrige: ¿Cuál será la nueva velocidad y dirección del avión?

La velocidad de la portadora del viento lateral cambia de tal manera que la componente hacia el oeste sigue siendo de 4 metros por segundo, pero ahora con una componente ascendente de 1 metro por segundo.

Si esto tampoco se corrige, ¿cuáles serán la velocidad y dirección reales del avión?

¿A qué distancia se elevará el avión en un minuto sin corrección?

4B.010

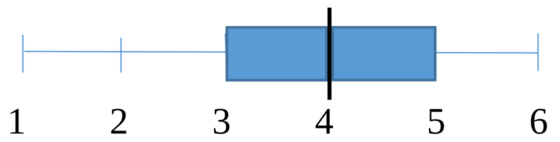
Si colocamos una bombilla en el punto focal de una parábola, todos los haces de luz se reflejarán para emitir en líneas paralelas desde la abertura.
Si cortamos el plato de la parábola a lo largo de su línea central, tenemos una parábola con el mismo punto focal.
Encuentra el punto focal de la parábola:

$$y = 5x^2 \quad para \ -0.15 \leq x \leq 0.15$$

(Posiblemente haga un plan para el cálculo y un boceto de trabajo para explicarlo).

Parte 5. Estadísticas – ejercicios

5.01



Lea el cuadro de cuadros y determine la observación más grande, la observación más pequeña, 1.cuartil, 2.cuartil, 3.cuartil.

¿Cuál es la mediana?

5.02

El año pasado 72 personas visitaron un teatro como este:

Observación. Número de visitas	Número de observaciónes
4	12
5	16
6	1
7	7
8	16
9	10
10	6
11	4
Total:	*72*

Agregue columnas para:

• Frecuencia de uno

• Frecuencia en porcentaje

• Frecuencia acumulada en porcentaje

Haga un gráfico de barras con el número de visitas en el primer eje y la frecuencia en porcentaje en el segundo eje.

Determine el valor medio y la desviación estándar del conjunto.

5.03

La tabla muestra un conjunto de observaciones y las frecuencias correspondientes:

Observación.	Frecuencias en %
[0 ; 10]	0
]10 ; 20]	0
]20 ; 30]	10
]30 ; 40]	30
]40 ; 50]	20
]50 ; 60]	30
]60 ; 70]	10
Total:	*100 %*

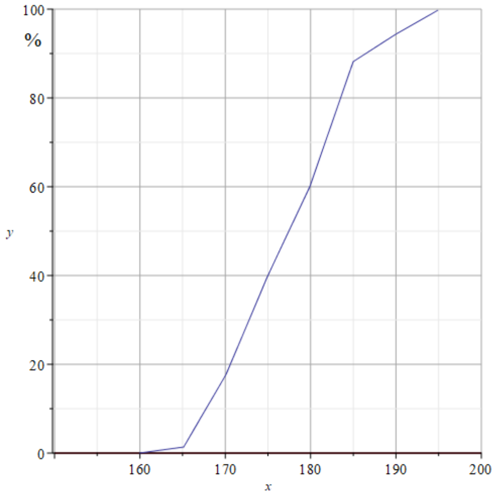
Hacer/dibujar una curva suma.

Lea el conjunto de cuartiles.

5.04

En un club de fútbol se midieron las alturas (en cm) de los niños menores. El resultado se muestra en la curva suma:

 ISBN 978-87-975307-3-3



Lea el conjunto de cuartiles.

Lea el cuantil del 90% y explique qué información proporciona.

El intervalo]175 ; 180] cm son 6 personas. ¿Cuántas personas se midieron en total?

5.05

En una competición de carrera se midió:

Observación. Tiempo de finalización en minutos	Número de personas (Acumulativo)
35-40	7
40-50	276
50-60	1669
60-70	3210
70-80	4093
80-90	4492
90-120	4896
120-150	4974
150-180	5000

(La serie medida se refiere a un antiguo problema de examen de secundaria danés de mayo de 1977. Sin embargo, las preguntas y las soluciones son del autor).

Trace una curva suma con el tiempo en el primer eje y la frecuencia acumulada en el segundo eje.

Lea el conjunto de cuartiles.

Haga un histograma con el tiempo en el primer eje y la frecuencia en porcentaje en el segundo eje. Informar en una leyenda cuanta área de las columnas corresponde al 10% de los corredores.

5.06

Se pide a un gran número de personas de todo tipo que pateen una pelota de fútbol horizontalmente desde el punto P con la máxima fuerza. El punto Q1 donde aterriza el balón variará según la fuerza de cada patada. Ver figura 1.

Luego se les pide que pateen con una fuerza menor, pero lo suficientemente grande como para que la pelota pase el borde. Ver figura 2.

¿Cuál es tu estimación?
• ¿La coordenada x de todos los puntos Q1 tendrá una distribución normal?
• ¿La coordenada x de todos los puntos Q2 tendrá una distribución normal?

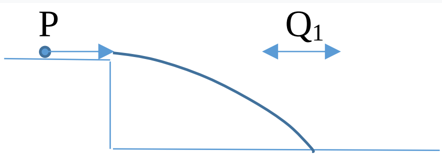


Figura 1

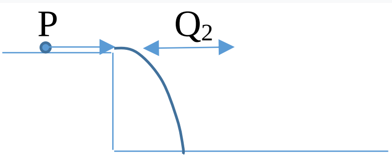


Figura 2

5.07

120 personas están reunidas en una sala (1). Se sabe que 15 personas entre la multitud juegan al bádminton.

¿Cuál es la frecuencia de los jugadores de bádminton?

¿Cuál es la probabilidad de conocer a un jugador de bádminton si le preguntas a una sola persona?

En otra sala (2) se encuentran reunidas otras 120 personas, de las cuales 15 son jugadores de bádminton.

¿Cuál es la probabilidad de conocer a dos jugadores de bádminton si le preguntas a una persona de la sala 1 y luego a una persona de la sala 2?

5.08

Un disc jockey quiere tocar dos baladas, tres discotecas y cuatro canciones de rock, pero no ha decidido en qué orden.
¿Cuántas combinaciones hay?

5.09

En 1998 la organización IPCC estimó una curva para el aumento más probable de CO2 en la atmósfera del año 2000 al 2100. La lectura de su curva da los siguientes valores aproximados:

Año	2000	2020	2040	2060	2080	2100
concentración de CO_2 en ppm.	370	410	470	535	600	700

ppm significa "partes por millón".

Determine la función mediante regresión exponencial y encuentre el factor de confiabilidad.

¿Parece adecuado estimar una función exponencial?

(A título informativo, la concentración de CO_2 se midió en 2020 en 411,4 ppm).

5.10
¿Cuántas combinaciones hay si tiramos un dado tres veces?

¿Cuál es la posibilidad de tener tres seises seguidos?

5.11
¿Cuántos "ojos" hay en tres dados?

¿Cuál es la posibilidad de obtener un seis en tres tiradas con un dado?

5.12
Se deberá elegir un capataz y un suplente y suplente en una junta de 6 miembros. El primero elegido se convierte en capataz, el siguiente en suplente y el tercero en suplente.

¿De cuántas maneras se pueden elegir las 3 personas?

¿Cuál es la probabilidad de que Liz se convierta en capataz, Peter en capataz adjunto y Ann en suplente?

5.13
Se deberá elegir un capataz y un suplente y suplente en una junta de 6 miembros. La elección mostrará quién de las 3 personas ocupa los 3 puestos, independientemente de cuál puesto. La decisión entre los 3 se pospone para más tarde.

¿Cuántas posibilidades hay para la selección de las 3 personas?

¿Cuál es la posibilidad de la elección de Liz, Peter y Ann?

5.14

El número de matrícula de un coche danés consta de dos letras mayúsculas de un alfabeto de 24 letras (4 de las 28 letras no se utilizan) y cinco cifras.

¿Cuántas combinaciones hay?

¿Cuál es la probabilidad de tener el número AB 12 345?

5.15

Una escuela de conducción debe tener tres coches nuevos. El distribuidor tiene seis modelos que se pueden utilizar.

¿Cuántas posibilidades hay de elegir coches si se puede repetir la misma combinación?

Tres modelos son del año pasado y el vendedor espera poder venderlos.

¿Cuál es la probabilidad de que eso ocurra?

5.16

Los tres estados de un país se reúnen para celebrar un torneo de fútbol. Se van a celebrar 12 partidos, distribuidos de modo que el estado más grande A debe celebrar 5 partidos, el segundo estado B debe celebrar 4 partidos y el estado C debe celebrar 3 partidos, pero ¿cuáles?
En un frasco se colocan 5 notas A, 4 notas B y 3 notas C. Un total de 12 notas.

Se sortean tres notas para los tres primeros partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean A?

5.17 (5.16 continúa)

Las tres notas mostraban A, B, B y no se devuelven. Se extraen dos nuevas notas.
¿Cuál es la probabilidad de B, C?

5.18

Antes de una elección, se pregunta a 1017 personas si votarán por un determinado partido. 408 dicen “sí”, 512 dicen “no” y 97 dicen “no sé”.
¿Cuál es el 95% de confianza de toda la población para votar por ese partido en particular?

5.19

A una futura escuela de equitación le gustaría saber cuántas personas de su zona de influencia quisieran montar en bicicleta. Piden a un instituto de análisis que haga un estudio con un alto grado de confianza en el resultado.
Viven aprox. En la zona viven 30.000 personas mayores de 10 años y ya existen dos escuelas de equitación. El instituto pregunta a 1.500 personas durante 10 años y elige un análisis con un 99% de confianza. Además, el instituto supone que la nueva escuela de equitación atraerá al 25% de los interesados.

51 responden “sí”.

¿Cuántas personas es probable que asistan a la escuela de equitación?

Números complejos

5.20

Dos números complejos se dan como $c = (5, \frac{\pi}{4})$ y $d = (3, \frac{\pi}{2})$ en forma polar. Calcular $c \cdot d$ y $\frac{c}{d}$

Convierta a la forma rectangular (como vectores) y calcule $c \cdot d$ y $\frac{c}{d}$

5.21

Dos números complejos se dan como $a = 3 + 4I$ y $b = -2 + 5I$ en forma rectangular. Calcular $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$

Convertir a la forma polar y calcular $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$

5.22

Dos números complejos se dan como $a = 3 + I$ y $b = -2 - 2I$ en forma rectangular. Calcular $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$

Convertir a la forma polar y calcular $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$

Muestra todos los números complejos como vectores en un diagrama.

5.23

Tenemos un número complejo: $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + I \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)$

Escribe z en forma exponencial.

Calcula z^3 y da la respuesta en forma rectangular.

Part 1.

Sección A – soluciones propuestas

1A.001

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 119 \\ +\ 27 \\ \hline 146 \\ \hline \end{array}$$

1A.002

$$\begin{array}{r} 9003 \\ +\ 271 \\ \hline 9274 \\ \hline \end{array}$$

1A.003

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 19.01 \\ +26.55 \\ \hline 45.56 \\ \hline \end{array}$$

1A.004

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}9.01 \\ +357.014 \\ \hline \underline{\underline{376.024}} \end{array}$$

1A.005

$$\begin{array}{r} \overset{1}{7}8 \\ +101.01 \\ +7.7803 \\ \hline \underline{\underline{186.7903}} \end{array}$$

1A.006

$$\begin{array}{r} 228 \\ -17 \\ \hline \underline{\underline{211}} \end{array}$$

1A.007

$$\begin{array}{r} 2\cancel{2}\overset{10}{7} \\ -18 \\ \hline \underline{\underline{209}} \end{array}$$

1A.008

$$\begin{array}{r} \overset{10}{} \overset{10}{} \overset{10}{} \\ 2\cancel{2}\cancel{2}.00 \\ -\ 18.34 \\ \hline \underline{\underline{208.66}} \end{array}$$

1A.009

$$\begin{array}{r} 916.07 \\ -805.00 \\ \hline \underline{\underline{111.07}} \end{array}$$

1A.010

$$\left.\begin{array}{r} 111 \\ -112 \end{array}\right\} \curvearrowright \left.\begin{array}{r} 112 \\ -111 \\ \hline 1 \end{array}\right\} \curvearrowright \underline{\underline{-1}}$$

1A.011

$$\left.\begin{array}{r} 27 \\ -318 \end{array}\right\} \curvearrowright \left.\begin{array}{r} \overset{10}{\cancel{3}}18 \\ -27 \\ \hline 291 \end{array}\right\} \curvearrowright \underline{\underline{-291}}$$

1A.012

$$\left.\begin{array}{r} 94.17 \\ -2016.40 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{r} 2016.40 \\ -\ 94.17 \\ \hline 1922.23 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{-1922.23}}$$

1A.013

$$\left.\begin{array}{r} 11.10 \\ -2222.22 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{r} 2222.22 \\ -\ 11.10 \\ \hline 2211.12 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{-2211.12}}$$

1A.014

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 27 \\ \hline 21 \\ 60 \\ \hline \underline{\underline{81}} \end{array}$$

 ISBN 978-87-975307-3-3

1A.015

$$
\begin{array}{r}
812 \cdot 694 \\
\hline
1388 \\
6940 \\
555200 \\
\hline
\underline{\underline{563528}}
\end{array}
$$

1A.016

$$
\begin{array}{r}
812 \cdot 694.03 \\
\hline
138806 \\
694030 \\
55522400 \\
\hline
\underline{\underline{563552.36}}
\end{array}
$$

1A.017

$$
\begin{array}{r}
812.99 \cdot 694.03 \\
\hline
624627 \\
6246270 \\
13880600 \\
69403000 \\
5552240000 \\
\hline
\underline{\underline{564239.4497}}
\end{array}
$$

1A.018

$$
\begin{array}{r}
2,22 \cdot 33,33 \\
\hline
6666 \\
66660 \\
666600 \\
\hline
73,9926 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

1A.019

$$
\begin{array}{r|l}
 & 14 \\
\hline
7 & 98 \\
 & 7 \\
\hline
 & 28 \\
 & 28 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{14}}
$$

1A.020

$$
\begin{array}{r|l}
 & 08 \\
\hline
12 & 96 \\
 & 0 \\
\hline
 & 96 \\
 & 96 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{8}}
$$

1A.021

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;12 \\
8 & \overline{96} \\
 & \underline{8} \\
 & 16 \\
 & \underline{16} \\
 & \;\;0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{12}}
$$

1A.022

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\;12.5 \\
8 & \overline{100.0} \\
 & \underline{8} \\
 & 20 \\
 & \underline{16} \\
 & \;\;\;40 \\
 & \;\;\;\underline{40} \\
 & \;\;\;\;\;0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{12.5}}
$$

1A.023

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 12.625 \\
8 \,\big) & 101.000 \\
 & \underline{8} \\
 & 21 \\
 & \underline{16} \\
 & 50 \\
 & \underline{48} \\
 & 20 \\
 & \underline{16} \\
 & 40 \\
 & \underline{40} \\
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{12.625}}
$$

1A.024

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 1.5833\ldots \\
12 \,\big) & 19.0000 \\
 & \underline{12} \\
 & 70 \\
 & \underline{60} \\
 & 100 \\
 & \underline{96} \\
 & 40 \\
 & \underline{36} \\
 & 40 \\
 & \underline{36} \\
 & 4
\end{array}
\qquad \underline{\underline{1.5833\ldots}}
$$

1A.025

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ 96\,\overline{\big)\,12.000} \\ 0 \\ \hline 120 \\ 96 \\ \hline 240 \\ 192 \\ \hline 480 \\ 480 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\underline{\underline{0.125}}$

1A.026

$$\begin{array}{r} 0.12371\ldots \\ 97\,\overline{\big)\,12.00000} \\ 0 \\ \hline 120 \\ 97 \\ \hline 230 \\ 194 \\ \hline 360 \\ 291 \\ \hline 690 \\ 679 \\ \hline 110 \end{array}$$

$\underline{\underline{0.12371\ldots}}$

1A.027

$\frac{9}{33} = \frac{3}{11}$

$\frac{112}{84} = \frac{56}{42} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

$\frac{-52}{65} = \frac{-4}{5}$

$\frac{12}{160} = \frac{6}{80} = \frac{3}{40}$

$\frac{165}{-33} = -5$

$\frac{21}{238} = \frac{3}{34}$

$\frac{437}{769} = \frac{23}{40}$ dividida por 19

$\frac{242}{550} = \frac{121}{275} = \frac{11}{25}$

$\frac{910}{13013} = \frac{70}{1001} = \frac{10}{143}$ Primero dividida por 13, luego por 7

1A.028

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$

$\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3} = \frac{2 \cdot 9}{7 \cdot 3} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

$\frac{1.2}{2} \cdot \frac{2}{1.2} = \frac{1.2 \cdot 2}{2 \cdot 1.2} = 1$

$\frac{1.2}{2} \cdot \frac{3}{1.2} = \frac{3}{2} (= 1.5)$

1A.029

$\frac{4}{\mathbf{8}} = \frac{20}{40}$

$\frac{6}{\mathbf{10}} = \frac{3}{5}$

$\frac{7}{12} = \frac{14}{\mathbf{24}}$

$\frac{\mathbf{-56}}{48} = \frac{-7}{6}$

$\frac{6}{7} = \frac{\mathbf{24}}{28}$

$\frac{-6}{26} = \frac{6}{\mathbf{-26}}$

1A.030

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{-3}{5}\cdot\frac{2}{1.5}=\frac{3\cdot(-3)\cdot2}{4\cdot5\cdot1.5}=\frac{-18}{30}=\frac{-9}{15}=\frac{-3}{5}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{-3}{5}\cdot\frac{-2}{1.5}=\frac{3\cdot(-3)\cdot(-2)}{4\cdot5\cdot1.5}=\frac{18}{30}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$24\cdot\frac{7}{8}=\frac{24\cdot7}{8}=21$$

$$-24\cdot\frac{7}{8}=\frac{(-24)\cdot7}{8}=-21$$

$$24\cdot\frac{-7}{8}=\frac{24\cdot(-7)}{8}=-21$$

$$24\cdot\frac{7}{-8}=\frac{24\cdot7}{-8}=-21$$

$$-\frac{3}{4}\cdot2\cdot7=\frac{(-3)\cdot2\cdot7}{4}=\frac{-42}{4}=\frac{-21}{2}$$

1A.031

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{1}=2$$

$$\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{1}=1$$

$$\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{1}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{1}{7}}{7}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{1}}=\frac{1}{7\cdot 7}=\frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{11}{13}\cdot\frac{11}{14}}{\frac{13}{14}}=\frac{11}{13}\cdot\frac{11}{14}\cdot\frac{14}{13}=\frac{11\cdot 11}{13\cdot 13}=\frac{121}{169}$$

1A.032

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{7}}{2-\frac{10}{4}}=\frac{\frac{14}{21}-\frac{3}{21}}{-\frac{2}{4}}=\frac{\frac{11}{21}}{-\frac{1}{2}}=\frac{11}{21}\cdot\frac{(-2)}{1}=-\frac{22}{21}$$

$$\frac{3-\frac{2}{7}}{4-\frac{5}{4}}=\frac{\frac{19}{7}}{\frac{11}{4}}=\frac{19}{7}\cdot\frac{4}{11}=\frac{76}{77}$$

$$\frac{\frac{2}{3}-3}{-6+\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{17}{3}}=-\frac{7}{3}\cdot\frac{(-3)}{17}=\frac{7}{17}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}=\frac{-\frac{4}{12}-\frac{3}{12}}{\frac{6}{30}-\frac{5}{30}}=\frac{-7}{12}\cdot\frac{30}{1}=-\frac{210}{12}=-\frac{55}{3}$$

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{24}{30}-\frac{25}{30}}{\frac{8}{12}-\frac{9}{12}}=\frac{-1}{30}\cdot\frac{(-12)}{1}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}$$

1A.033

$$\frac{3}{7}+\frac{3}{4}=\frac{3\cdot4}{7\cdot4}+\frac{3\cdot7}{4\cdot7}=\frac{12+21}{28}=\frac{33}{28}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{9}=\frac{5\cdot9}{6\cdot9}-\frac{2\cdot6}{9\cdot6}=\frac{45-12}{54}=\frac{33}{54}=\frac{11}{18}$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=-\frac{1\cdot6}{4\cdot6}+\frac{5\cdot4}{6\cdot4}=\frac{-6+20}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

1A.034

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{1(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{1(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}=$$
$$\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2}=\frac{2a}{a^2-b^2}$$

1A.035

$$\frac{(-4)\cdot\frac{11}{7}}{-\frac{11}{7}}=(-4)\cdot\frac{11}{7}\cdot\left(-\frac{11}{7}\right)=4$$

$$\frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}}{(-4)\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}}=(-3)\cdot\frac{9}{13}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{2}{1}=$$
$$\frac{(-3)\cdot9\cdot(-1)\cdot8\cdot2}{13\cdot4\cdot7\cdot1}=\frac{432}{364}=\frac{216}{182}=\frac{108}{91}$$

$$\frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}+6\cdot\frac{9}{13}}{\frac{7}{9}}=\frac{\frac{-27}{13}+\frac{54}{13}}{\frac{7}{9}}=\frac{\frac{27}{13}}{\frac{7}{9}}=\frac{27}{13}\cdot\frac{9}{7}=\frac{243}{91}$$

1A.036

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{3-2}{6}}{2}=\frac{1}{6\cdot 2}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{6-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}+4}=\frac{\frac{24-1}{4}}{\frac{7+16}{4}}=\frac{23}{4}\cdot\frac{4}{23}=1$$

$$\frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{15}{4}-2}=\frac{\frac{9-1}{3}}{\frac{15-8}{4}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{7}{4}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{32}{21}$$

$$\frac{\frac{8}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}+\frac{16}{3}}=\frac{\frac{24-7}{21}}{\frac{21}{3}}=\frac{\frac{17}{21}}{7}=\frac{17}{147}$$

1A.037

$\frac{1}{2}=0.5=50\%$ $\quad\frac{7}{8}=0.875=87.5\%$

$\frac{18}{12}=1.5=150\%$ $\quad\frac{1000}{25}=40=4000\%$

$\frac{5}{10}=0.5=50\%$ $\quad\frac{10}{5}=2=200\%$

1A.038

$$\frac{35}{140}=\frac{1}{4}=0.25=25\%$$

$$\frac{35}{70}=\frac{1}{2}=0.5=50\%$$

$$\frac{35}{175}=\frac{1}{5}=0.2=20\%$$

1A.039

$$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$$

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$250\% = \frac{250}{100} = \frac{25}{10}$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

1A.040

Fin menos inicio: 60% - 50% = 10%

90% - 80% = 10%

40% - 50% = -10%

1A.041

- Reducción de precio: fin – inicio = 350 – 400 = -50

  Relativa a 400: $\frac{-50}{400} = \frac{-12.5}{100} = -12.5\ \%$

- Reducción de precio: fin – inicio = 400 – 350 = 50

  Relativa a 350: $\frac{50}{350} \approx \frac{14.3}{100} \approx 14.3\ \%$

1A.042

$x + x + x = 3\mathrm{x}$

$x - x - x = -\mathrm{x}$

$2x - x - x = 0$

$x \cdot y \cdot z = \mathrm{xyz}$

$a + b - 2a = -\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$

$a \cdot b - 2a = \mathrm{ab} - 2\mathrm{a}$

$4b - 13b = -9\mathrm{b}$

1A.043

$\frac{3x}{x} = 3$

$\frac{3x}{y} = \frac{3x}{y}$

$\frac{3x+3y}{y} = \frac{3x}{y} + \frac{3y}{y} = \frac{3x}{y} + 3$

$\frac{3a}{b} + \frac{a}{2b} = \frac{6a}{2b} + \frac{a}{2b} = \frac{7a}{2b}$

$\frac{8b}{b} - \frac{8}{8} = 8 - 1 = 7$

1A.044

$\frac{4}{\mathbf{8}} = \frac{20}{40}$ $\frac{6}{\mathbf{10a}} = \frac{3}{5a}$ $\frac{7aa}{\mathbf{12a}} = \frac{14a}{24}$

$\frac{48}{\mathbf{-56}} = \frac{6}{-7}$ $\frac{6}{7c} = \frac{\mathbf{24c}}{28c^2}$ $\frac{26}{\mathbf{-6}} = \frac{-26}{6}$

1A.045

$x \cdot (2 - y) = 2x + xy$

$-4(x - y) = -4x + 4y$

$(3 - x) \cdot 3 = 9 - 3x$

$(7 - y)2 = 14 - 2y$

$3a(6 - a) = 18a - 3aa$

$2(2 - a)4 = 2(8 - 4a) = 16 - 8a$

1A.046

$4(7a + b) + 8(a + 3b) =$

$28a + 4b + 8a + 24b =$

$36a + 28b$

$6(d - 2e - f) + 2(d - e + 2f) =$

$6d - 12e - 6f + 2d - 2e + 4f =$

$8d - 14e - 2f$

$a(a - b) + b(a + b) =$

$aa - ab + ab + bb =$

$aa + bb$

1A.047

$14 - 7a = 7(2 - a)$

$4a + 8b = 4(a + 2b)$

$10a + 5b = 5(2a + b)$

$8 - 4x = 4(2 - x)$

$18x - 3xx = 3x(6 - x)$

$-6xy + 4x = 2x(-3y + 2)$

1A.048

$$\frac{2x+2y}{4} = \frac{2x}{4} + \frac{2y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$$\frac{3a-3b}{4} = \frac{3a}{4} - \frac{3b}{4}$$

$$\frac{3a-3b}{3} = \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = a - b$$

$$\frac{3aa-3ab}{3a} = a - b$$

$$\frac{3a-3b}{\frac{1}{2}} = \frac{3a}{\frac{1}{2}} - \frac{3b}{\frac{1}{2}} = 3a \cdot \frac{2}{1} - 3b \cdot \frac{2}{1} = 6a - 6b$$

1A.049

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9} = \frac{6\pi}{18} - \frac{3\pi}{18} + \frac{4\pi}{18} = \frac{6\pi-3\pi+4\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$$

$$\frac{2\pi}{4\pi} \cdot 8\pi - 5\pi = \frac{2 \cdot 8}{4} \cdot \pi - 5\pi = 4\pi - 5\pi = -\pi$$

1A.050

$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

$(4+a-b)(a+b) = 4a + 4b - aa + ab - ab - bb$ *

$(2a+b)(b-3a)2 = 4ab - 12aa + 2bb - 6ab$

$(5a-5b)(5a+4b) = 25aa + 20ab - 25ab - 20bb$ *

*puede reducirse aún más.

1A.051

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$(4x+1)^2 = 16x^2 + 1 + 8x$

$(\frac{1}{2}x+1)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 1 + x$

$(\mathrm{x}-5)^2 = x^2 + 25 - 10\mathrm{x}$

$(2x+2y)^2 = 4x^2 + 4\mathrm{y}^2 + 8xy$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(3a+1)(3a-1) = 9a^2 - 1$

$(3a+4b)(3a-4b) = 9a^2 - 16b^2$

1A.052

$x^2 + 4 - 4x = (x-2)^2$

$4 + x^2 - 4x = (2-x)^2$

$9 - x^2 = (3+x)(3-x)$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$9a^2 + 4b^2 + 12ab = (3a+2b)^2$

$4 + 36b^2 - 24b = (2+6b)^2$

1A.053

$(3x-5y)^2 = 9x^2 + 25y^2 - 30xy$

$(1-2x)^2 = 1 + 4x^2 - 4x$

$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$

$(-3-3x)(-3+3x) = 9 - 9x^2$

1A.054

$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$

$4b^2 + 1 - 2b = (2b-1)^2$

$4^2 - b^2 = 16 - b^2 = (4+b)(4-b)$

$(3a)^2 - (4b)^2 = 9a^2 - 16b^2 = (3a+4b)(3a-4b)$

1A.055

$$\frac{4a^2-9}{4a^2+9-12a} = \frac{(2a+3)(2a-3)}{(2a-3)^2} = \frac{2a+3}{2a-3}$$

$$\frac{b^2+9+6b}{b^2+3b} = \frac{(b+3)(b+3)}{b(b+3)} = \frac{b+3}{b}$$

$$\frac{3c^2-12c+12}{5c^2-10c} = \frac{3(c^2-4c+4)}{5c^2-10c} = \frac{3(c-2)(c-2)}{5c(c-2)} = \frac{3(c-2)}{5c}$$

1A.056

$$\frac{4a^2-16a+16}{5a^2-10a} = \frac{4(a-2)(a-2)}{5a(a-2)} = \frac{4(a-2)}{5a}$$

$$\frac{9b^2-16c^2}{3a-4c} = \frac{(3b+4c)(3b-4c)}{3b-4c} = 3b+4c$$

$$\frac{8b^2-18c^2}{2b+3c} = \frac{2(4b^2-9c^2)}{2b+3c} = \frac{2(2b+3c)(2b-3c)}{2b+3c} = 2(2b-3c) = 4b-6c$$

1A.057

$$x(x+1)+1 = x^2+x+1$$

$$(1+x)x+1 = x+x^2+1 = x^2+x+1$$

$$x(x+2x) = x^2+2x^2$$

1A.058

$$x(x(x+1)+1)+1 =$$

$$x(x^2+x+1)+1 =$$

$x^3 + x^2 + x + 1$

1A.059

$x^3 + x^2 + x + 1 =$

$x(x^2 + x + 1) + 1 =$

$x(x(x + 1) + 1) + 1$

1A.060

$(x - 3)^2 + (x + 3)(x - 3) =$

$x^2 + 9 - 6x + x^2 - 9 =$

$2x^2 - 6x$

$(4x - 2)^2 - (2x + 2)^2 - 6x(x - 2) =$

$16x^2 + 4 - 16x - 4x^2 - 4 - 8x - 6x^2 + 12x =$

$6x^2 - 12x$

$(x + 1)^2 + (x - 1)^2 =$

$x^2 + 1 + 2x + x^2 + 1 - 2x =$

$2x^2 + 2$

$-(4x - 5)(4x + 5) + (3x + 2)^2 + 7x^2 =$

$-16x^2 + 25 + 9x^2 + 4 + 12x + 7x^2 =$

$12x + 29$

$(3x-2)^2 - (3x+2)(3x-2) + 3(3x+2) =$

$9x^2 + 4 - 12x - 9x^2 + 4 + 9x + 6 =$

$-3x + 14$

1A.061

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{-4} = sin\ solución$

$\sqrt{-16} =$ $sin\ solución$

1A.062

$\sqrt{0.64} = 0.8$ $\sqrt{0.81} = 0.9$ $\sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ $\sqrt{\frac{-4}{-9}} = \frac{2}{3}$

1A.063

$\sqrt{2} = 1.41..$ $\sqrt{3} = 1.73..$ $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ $\sqrt{2^2 - 4} = 0$

$\sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5} = sin\ solución$

1A.064

$\sqrt{10\cdot 10} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{10\cdot 10} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{10} = 10$

$\sqrt{9\cdot 4} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{9\cdot 4} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{4} = 6$

1A.065

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}$

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{36}} = \frac{11}{6}$

1A.066

$\sqrt{4}\cdot\sqrt{4} = 4$

$\sqrt{4}+\sqrt{4} = 2\sqrt{4} = 4$

$\sqrt{4}-\sqrt{4} = 0$

$\sqrt{4}+\sqrt{16} = 2+4 = 6$

$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

1A.067

$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$

$\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

$\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{(-ab)^2} = \sqrt{(ab)^2} = ab$

1A.068

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

$\sqrt{\frac{a}{a}} = 1$

$\sqrt{\frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

$$\sqrt{\frac{16x}{25y}} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{5\sqrt{y}}$$

1A.069

$$10^3 \cdot 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$$

$$10^2 \cdot 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$$

$$10^{-2} \cdot 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$$

$$10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 10^1 = 10$$

$$10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 10^{\frac{4}{2}} = 10^2 = 100$$

$$10^{-\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 10^{-\frac{2}{2}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

1A.070

$$\frac{1}{10^{-1}} = 10^1 = 10$$

$$\frac{2}{10^{-4}} = 2 \cdot 10^4$$

$$\frac{10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4}} = 10^2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 = 10^{2-1+4} = 10^5$$

$$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3} = 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} = 10^5$$

$$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3} = \frac{10^{3+2-1}}{10^{-4+3}} = \frac{10^4}{10^{-1}} = 10^4 \cdot 10^1 = 10^5$$

1A.071

$$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{3+2-1}}{2 \cdot 10^{-4-3}} = \frac{10^4}{2 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 10^7 = \frac{1}{2} \cdot 10^{11}$$

$$\frac{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}} \cdot (10^4)^2}{10^2 \cdot 10^{-1}} = \frac{10^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+4\cdot 2}}{10^{2-1}} = \frac{10^7}{10^1} = 10^{7-1} = 10^6$$

1A.072

$$\frac{10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 0.1}{\frac{1}{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} = \frac{10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-1}}{10^{-1} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} = \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 10^{-4} \cdot 10^3 = 10^{-1}$$

$$\frac{0.01 \cdot 0.1 \cdot \frac{2}{10}}{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}}} = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^2} = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{10^{11} \cdot 10^0 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}} = \frac{10^8}{0.2 \cdot 10^1} = \frac{10^7}{0.2} = \frac{1 \cdot 10^7}{0.2} = 5 \cdot 10^7$$

1A.073

$$\frac{1}{x^{-1}} = x^1 = x$$

$$\frac{2}{x^{-4}} = 2 \cdot x^4$$

$$\frac{x^2 \cdot x^{-1}}{x^{-4}} = x^2 \cdot x^{-1} \cdot x^4 = x^{2-1+4} = x^5$$

1A.074

$$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$4 \cdot 2^{-5} = \frac{4}{2^5} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$2 \cdot (-2)^5 = -64$

$2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 = -16 + 4 = -12$

1A.075

$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

$((2 \cdot 3)^3)^2 = ((6)^3)^2 = 6^6 = 46\,656$

$\left(\left(\frac{10}{5}\right)^3\right)^2 = ((2)^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

$\left(\left(\frac{11}{5}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^6 = \frac{11^6}{5^6} \approx 113.37 \ldots.$ último paso por CAS

1A.076

$6^2 \cdot 6^3 = (6)^{2+3} = 6^5$

$4^6 \cdot 5^6 = (4 \cdot 5)^6 = 20^6$

$\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2 = 25$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^5 = 1$

$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^7}{\left(\frac{3}{4}\right)^6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{7-6} = \frac{3}{4}$

$\frac{4^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{16}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 16 \cdot \frac{4}{1} = 64$

$(4^3)^5 = 4^{15}$

$(8^4)^5 = 8^{20}$

1A.077

$$\frac{4^3 \cdot 3^3}{6^3} = \frac{(4 \cdot 3)^3}{(6)^3} = \left(\frac{12}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\frac{5^3 \cdot 3^3}{18^3} = \frac{(5 \cdot 3)^3}{(6 \cdot 3)^3} = \left(\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\frac{(4^2)^7}{16^7} = \frac{(4^2)^7}{(4^2)^7} = 1$$

$$3^6 \cdot 6^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{3 \cdot 6 \cdot 1}{2}\right)^6 = 9^6$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 6^5 = \left(\frac{4 \cdot 1 \cdot 6}{6 \cdot 4}\right)^5 = 1^5 = 1$$

1A.078

$$4^5 \cdot 3^5 \cdot \frac{1}{12^4} = \frac{12^5}{12^4} = 12$$

$$\frac{2^3 \cdot 3^3}{12^3} = \left(\frac{2 \cdot 3}{12}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{4^4 \cdot 8}{2^5} = \frac{(2^2)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^8 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{10}}{2^5} = 2^5 = 32$$

$(4^3)^2 = 4^6$

$4^{3^2} = 4^9$

1A.079

$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

$((a \cdot b)^3)^2 = (a^3 \cdot b^3)^2 = a^6 \cdot b^6$

$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$ o $x^3 \cdot y^{-3}$

$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)^2 = \frac{x^6}{y^6}$ o $x^6 \cdot y^{-6}$

1A.080

$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{8} = 8^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} = 8^{\frac{2}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} = 8^{\frac{3}{8}}$

$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{8} = 6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{2}{6}} \cdot 6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{3}{6}} = 6^{\frac{1}{2}}$ or $\sqrt{6}$

$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{48^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{48}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ usando CAS en el paso final,

o diciendo: la tercera raíz de 8 es 2, - elevado a 1 todavía es 2.

$\sqrt[5]{243}^{\,3} = (243^{\frac{1}{5}})^3 = 243^{\frac{3}{5}} = 27$ usando CAS en el paso final,

o diciendo: la raíz quinta de 243 es 3, - elevado a 3 es 27.

1A.081

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}} = 4^{\frac{6}{6}} = 4^1 = 4$

$\frac{\sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[4]{6^2}}{6\sqrt{6}} = \frac{6^{3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 6^{2 \cdot \frac{1}{4}}}{6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = 1$

1A.082

$18x + 13 = 13x + 58 \qquad \Leftrightarrow$

$18x - 13x = 58 - 13 \qquad \Leftrightarrow$

$5x = 45 \qquad \Leftrightarrow$

$x = \frac{45}{5} \qquad \Leftrightarrow$

$x = 9$

1A.083

$14(5 + x) = 5(3x - 4) - 3(5 - 2x) \qquad \Leftrightarrow$

$70 + 14x = 15x - 20 - 15 + 6x \qquad \Leftrightarrow$

$14x - 5x - 6x = -20 - 15 - 70 \qquad \Leftrightarrow$

$-7x = -105 \qquad \Leftrightarrow$

$x = \frac{-105}{-7} \qquad \Leftrightarrow$

$x = 15$

Prueba por inserción

$14(5 + 15) = 5(3 \cdot 15 - 4) - 3(5 - 2 \cdot 15) \qquad \Leftrightarrow$

$14 \cdot 20 = 205 + 75 \qquad \Leftrightarrow$

$280 = 280$ cual es verdad.

1A.084

$4 - x = 11 \qquad \Leftrightarrow$

$-x = 11 - 4 \quad \Leftrightarrow$

$-x = 7 \quad \Leftrightarrow$

$x = -7$

$5 - x = 5 \quad \Leftrightarrow$

$-x = 5 - 5 \quad \Leftrightarrow$

$-x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = 0$

$-3x = 24 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{24}{-3} \quad \Leftrightarrow$

$x = -8$

$\frac{3}{4}x = 7 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{4}{3} \cdot 7 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{28}{3}$

$\frac{1}{2}(1 + x) = 8 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 8 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}x = 8 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$x = 2 \cdot (8 - \frac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow$

$x = 16 - 1 \quad \Leftrightarrow$

$x = 15$

1A.085

$\frac{4y+1}{5} - \frac{4y-3}{4} = -3 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{4(4y+1)-5(4y-3)}{5 \cdot 4} = -3 \quad \Leftrightarrow$

$16y + 4 - 20y + 15 = -60 \quad \Leftrightarrow$

$-4y + 19 = -60 \quad \Leftrightarrow$

$-4y = -79 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{79}{4}$

$\frac{z+3}{2z} - \frac{2z-5}{3z} = \frac{1}{6}$ dónde $z \neq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{3(z+3)-2(2z-5)}{6z} = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow$

$3z + 9 - 4z + 10 = z \quad \Leftrightarrow$

$19 = 2z \quad \Leftrightarrow$

$z = \frac{19}{2}$

1A.086

$\frac{6y-5}{6} - \frac{8-6y}{6} = -\frac{7y+3}{8} - \frac{9-2y}{3} \quad \Leftrightarrow$

$$24\left(\frac{6y-5}{6}\right)-24\left(\frac{8-6y}{6}\right)=-24\left(\frac{7y+3}{8}\right)-24\left(\frac{9-2y}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{24}{6}(6y-5)-\frac{24}{6}(8-6y)=-\frac{24}{8}(7y+3)-\frac{24}{3}(9-2y) \Leftrightarrow$$

$$4(6y-5)-4(8-6y)=-3(7y+3)-8(9-2y) \quad \Leftrightarrow$$

$$24y-20-32+24y=-21y-9-72+16y \quad \Leftrightarrow$$

$$48y-52=-5y-81 \quad \Leftrightarrow$$

$$53y=-29 \quad \Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{29}{53}$$

1A.087

$$\frac{5}{y}=\frac{5}{9} \quad \Leftrightarrow$$

$$5y=9\cdot 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{9\cdot 5}{5}$$

$$x=9$$

$$\frac{a+6}{13}=\frac{5}{8} \quad \Leftrightarrow$$

$$8(a+6)=65 \quad \Leftrightarrow$$

$$8a+48=65 \quad \Leftrightarrow$$

$$a=\frac{65-48}{8} \quad \Leftrightarrow$$

$$a=\frac{17}{8}$$

$\frac{6}{5+5} = \frac{b}{5}$ $\Leftrightarrow$

$6 \cdot 5 = 10b$ $\Leftrightarrow$

$b = \frac{30}{10} = 3$

$\frac{c}{5} = \frac{15+c}{5+3}$ $\Leftrightarrow$

$c = \frac{75+5c}{8}$ $\Leftrightarrow$

$8c - 5c = 75$ $\Leftrightarrow$

$3c = 75$ $\Leftrightarrow$

$c = 25$

1A.088

$0.45x = 1.35$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1.35}{0.45} = 3$

$-4x = -\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{16}$

$-\frac{7}{5+3}x = -\frac{1}{6}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{7}{8}}$ $\Leftrightarrow$

$x = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$

1A.089

$x^{\frac{1}{2}} = 3$ $\Leftrightarrow$

$(x^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2$ $\Leftrightarrow$

$x = 9$

$x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x^{\frac{1}{2}} = 2$ $\Leftrightarrow$

$x = 4$

$2x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$2x^{\frac{1}{2}} = 2$ $\Leftrightarrow$

$(2x^{\frac{1}{2}})^2 = 2^2$ $\Leftrightarrow$

$4x = 4$ $\Leftrightarrow$

$x = 1$

1A.090

$\frac{16x-2}{2(2x+1)} = \frac{12x-18}{3x-4}$ dónde $x \neq -\frac{1}{2}$ y $x \neq -\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow$

$(16x-2)(3x-4) = (12x-18) \cdot 2(2x+1)$ $\Leftrightarrow$

$48x^2 - 64x - 6x + 8 = 12(4x^2 - 4x - 3)$ $\Leftrightarrow$

$48x^2 - 70x + 8 = 48x^2 - 48x - 36$ $\Leftrightarrow$

$-22x = -44$ $\Leftrightarrow$

$x = 2$

1A.091

$4 + 4x = 2ax + 6$ $\Leftrightarrow$

$4x - 2ax = 6 - 4$ $\Leftrightarrow$

$2x(2-a) = 2$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{2-a}$ para $x \neq 2$

1A.092

$x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{2 \pm 0}{2}$ $\Leftrightarrow$

$x = 1$

1A.093

$x^2 - 2\text{x} = 0$ usando la solución cer $\Leftrightarrow$

$x(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 0 \quad y \quad x = 2$

1A.094

$-2 - 3x = -2x^2$ $\Leftrightarrow$

$2x^2 - 3\text{x} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$ $\Leftrightarrow$

$x = 2 \quad y \quad x = -\frac{1}{2}$

1A.095

$|x| = \sqrt{\text{x}}$ dónde $\text{x} \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$x^2 = x$ $\Leftrightarrow$

$x^2 - x = 0$ $\Leftrightarrow$

$x(x-1) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 0 \quad y \quad x = 1$

Alternativamente:

$|x| = \sqrt{\mathrm{x}}$ dónde $\mathrm{x} \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$x^2 = x$ $\Leftrightarrow$

$x^2 - x = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 0}}{2 \cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

$x = 0 \;\; y \;\; x = 1$

1A.096

$-\sqrt{2 - \mathrm{x}} = 0$ dónde $-\infty < \mathrm{x} \leq 2$ $\Leftrightarrow$

$\sqrt{2 - \mathrm{x}} = 0$ $\Leftrightarrow$

$2 - x = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 2$

1A.097

$x(x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 0 \;\; y \;\; x = 3$

$4x(x + 4) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 0 \;\; y \;\; x = -4$

$(x - 3)(x - 7) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 3 \;\; y \;\; x = 7$

$4(x-5)(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=5 \quad y \quad x=1$

$8(x+4)x=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=-4 \quad y \quad x=0$

1A.098

$-x^2-2\mathrm{x}+3=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)} \quad \Leftrightarrow$

$x=-3 \quad y \quad x=1$

$2x^2+4\mathrm{x}-20=0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2+2\mathrm{x}-10=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{44}}{2} \quad \Leftrightarrow$

$x=\frac{-2+\sqrt{44}}{2} \quad y \quad x=\frac{-2-\sqrt{44}}{2} \quad \Leftrightarrow$

$x=-1+\sqrt{11} \quad y \quad x=-1-\sqrt{11}$

$2x^2-4\mathrm{x}+8=0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2 \cdot 1}$ el discriminante es negativo =>

Sin solución

1A.099

$-5x^2 - 4x - 1 = 0$ ⇔

$5x^2 + 4x + 1 = 0$ ⇔

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$ el discriminante es negativo =>

Sin solución

1A.100

$x^3 + x^2 = 0$

Suposiciones:

$x = -1$	=>	$-1 + 1 = 0$	verdad
$x = 1$	=>	$11 + 1 = 0$	falso
$x = 0$	=>	$0 + 0 = 0$	verdad

y una suposición entre las raíces -1 y 0:

$x = -\frac{1}{2}$	=>	$-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 0$	falso

Todas las demás conjeturas resultan falsas, por lo que dos raíces:

$x = -1 \quad y \quad x = 0$, lo cual es confirmado por el CAS.

1A.101

$x^3 + x^2 - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$x^3 + x^2 = 2$

Suposiciones:

$x = 0$	=>	$0 - 0 = 2$	falso
$x = 1$	=>	$1 + 1 = 2$	verdad
$x = 2$	=>	$8 - 4 = 2$	falso

x < 1 hace que el lado izquierdo sea demasiado pequeño, x > 1 hace que el lado izquierdo sea demasiado grande, por lo que solo x = 1 es una raíz, lo cual es confirmado por CAS.

1A.102

$x^4 = 16 \qquad \Leftrightarrow$

$(x^2)^2 = 4^2 \qquad \Leftrightarrow$

$x^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow$

$x = -2 \quad y \quad x = 2$

También se puede resolver adivinando y controlar mediante inserción.
La resolución es confirmada por el CAS.

$x^4 = 81 \qquad \Leftrightarrow$

$(x^2)^2 = 9^2 \qquad \Leftrightarrow$

$x^2 = 9 \qquad \Leftrightarrow$

$x = -3 \quad y \quad x = 3$

También se puede resolver adivinando y controlar mediante inserción.
La resolución es confirmada por el CAS.

1A.103

$x^4 + x^2 = 81$

Suposiciones:

$x = 2$	=>	$16 + 4 = 81$	falso
$x = 3$	=>	$81 + 9 = 81$	falso

Para x = 2 se ve que el lado izquierdo es más pequeño que el lado derecho. Para x = 3 se ve que el lado izquierdo es un poco más grande que el lado derecho. Entonces, debe haber una raíz en aproximadamente: x ≈ 2.9…

$x = -2$	=>	$16 + 4 = 81$	falso
$x = -3$	=>	$81 + 9 = 81$	falso

Para x = -2 se ve que el lado izquierdo es más pequeño que el lado derecho. Para x = -3 se ve que el lado izquierdo es un poco más grande que el lado derecho. Entonces, debe haber una raíz en aproximadamente: x ≈ -2.9…

Sólo son posibles raíces entre -2 y -3, así como entre 2 y 3.

CAS confirma dos raíces: x = -2.917… y   x = 2.917…

1A.104

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2 \cdot 1} \qquad \Leftrightarrow$

$x^2 = 4 \;\; y \;\; x^2 = 36 \qquad \Leftrightarrow$

$x = \pm 2 \;\; y \;\; x = \pm 6$

$2x^4 - 64x^2 - 288 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$x^4 - 32x^2 - 144 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 4 \cdot 1 \cdot (-144)}}{2 \cdot 1} \qquad \Leftrightarrow$

$x^2 = -8 \;\; lo\ cual\ no\ es\ posible, \;\; y \;\; x^2 = 36 \qquad \Leftrightarrow$

$x = \pm 6$

1A.105

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$

Lo cual es cierto para cualquiera de los dos

$x^2 = 0$ o $(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x^2 = 0$ es cierto para $x = 0$

$(x^2 - 2x - 3) = 0$ es cierto para:

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

$x = -1 \quad y \quad x = 3$

Combinado la repuesta es: $x = 0 \quad y \quad x = -1 \quad y \quad x = 3$

1A.106

$10x + 4y = 44 \quad y \quad 2x - y = 7$

Equación dos: $y = 2x - 7$

Ensertado en eq. una: $10x + 4(2x - 7) = 44$ $\Leftrightarrow$

$10x + 8x - 28 = 44$ $\Leftrightarrow$

$18x = 72$ $\Leftrightarrow$

$x = 4$

Ensertado en eq. dos: $y = 2 \cdot 4 - 7$ $\Leftrightarrow$

$y = 1$

1A.107

$2x - y = 6 \quad y$

$3x - 5y = 2$ $\Leftrightarrow$

$6x - 3y = 18 \quad y$

$6x - 10y = 4$

Eq.una – eq. dos: $7y = 14 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2$

Ensertado en eq. una: $2x - 2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

1A.108

$\frac{3}{2x-3y+3} = \frac{4}{3x-4y+3} \quad y \quad \frac{5}{3x+4y-6} = \frac{5}{4x+3y+1}$

Eq. una: $9x - 12y + 9 = 8x - 12y + 9 \quad \Leftrightarrow$

$x = 3$

Eq. dos: $20x + 15y + 5 = 15x + 20y - 30 \quad \Leftrightarrow$

$-5x + 5y - 35 = 0$

Para x = 3: $-5 \cdot 3 + 5y - 35 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$5y = 50 \quad \Leftrightarrow$

$y = 10$

1A.109

$x + \frac{1}{2}y = 4 \quad y$

$2x - 3y = -3 \quad \Leftrightarrow$

$2x + y = 8 \quad y$

$2x - 3y = -2$

Eq.una – eq. dos: $4y = 10$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{5}{2}$

Ensertado en eq. una: $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = 4$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{11}{4}$

1A.110

$\frac{1}{2}x + 3y = -7 \quad y$

$-2x + 2y = -14 \qquad \Leftrightarrow$

$x + 6y = -14 \quad y$

$-6x + 6y = -42$

Eq.una – eq. dos: $7x = 28$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$

Ensertado en eq. una: $\frac{1}{2}4 + 3y = -7$ $\Leftrightarrow$ $y = -3$

1A.111

Directamente proporcional en 1) y 2).
Inversamente proporcional en 3) y 6).

1A.112

Abierto: ○————○]2 ; 3[$2 < x < 3$

2 3

Cerrado: •————• [2 ; 3] $2 \leq x \leq 3$

1A.113

○———————	]-17 ; ∞[	x > -17
-17		
•———————	[-17 ; ∞[	x ≥ -17

1A.114

$\frac{1}{2}x + 3 > -\frac{1}{3}x + 4 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x > 4 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x > 1 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{5}{6}x > 1 \quad \Leftrightarrow$

$x > \frac{6}{5}$

$\frac{4}{3}x - 3 > 4 - \frac{1}{3}x \quad \Leftrightarrow$

$\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x > 4 + 3 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{5}{3}x > 7 \quad \Leftrightarrow$

$x > \frac{3}{5} \cdot 7 \quad \Leftrightarrow$

$x > \frac{21}{5}$

1A.115

$2x - 4 < 2x + 3 < 6 - x$

Nos dividimos en dos desigualdades:

$2x - 4 < 2x + 3 \quad y \quad 2x + 3 < 6 - x$ ⇔

$0 < 7 \ \ verdad\ para\ todo\ x \quad y \quad x < 1$

Combinado: x < 1 o: x pertenece al intervalo]-∞; 1[

Parte 1.

Sección B – soluciones propuestas

1B.01

$25\% - 20\% = 5\% = 8\ m^3$ =>

$100\% = \frac{100}{5} \cdot 8 = 160\ m^3$

O estableciendo una ecuación con V para el volumen:

$\frac{V}{5} + 8 = \frac{V}{4}$ ⇔

$\frac{V}{5} - \frac{V}{4} = -8$ ⇔

$\frac{4V - 5V}{20} = -8$ ⇔

$\frac{-V}{20} = -8$ ⇔

$\mathrm{V} = 160\ m^3$

1B.02

1 bolsa pesa $440 - 419 = 21kg$

Número de bolsas al principio $\frac{419}{21} \approx 20\ bolsas$

1B.03

V para volumen, ΔV para el cambio de volumen por minuto y n para el número de minutos:

$\Delta V = 40 - 17 = 23\ litros$

$V = \Delta V \cdot n$ =>

$300 = 23 \cdot n$ ⇔

$n \approx 13\ minutos$

1B.04

$5 \cdot 30 \cdot 0.75 = 112.5\ fardos$

O más detallado:

$5\ [caballos] \cdot 30\ [días] \cdot 0.75\ [\frac{fardos}{caballo \cdot día}] = 112.5\ fardos$

1B.05

$14\% - 10\% = 4\% = 20\ litros$ =>

$100\% = \frac{100}{4} \cdot 20 = 500\ litros$

O estableciendo una ecuación con V para el volumen:

$0.10 \cdot \mathrm{V} + 20 = 0.14 \cdot \mathrm{V}$ ⇔

$20 = 0.14 \cdot \mathrm{V} - 0.10 \cdot \mathrm{V}$ ⇔

$20 = 0.04 \cdot \mathrm{V}$ ⇔

$V = \frac{20}{0.04} = 500\ litros$

1B.06

El número de días se llama n.

$$\frac{n}{3}\left(\frac{2}{4}\cdot 2.5\right)+\frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot 2.5\right)+\frac{n}{3}\left(\frac{4}{4}\cdot 2.5\right)=450 \quad \Leftrightarrow$$

$$0.4167\cdot \mathrm{n}+0.625\cdot \mathrm{n}+0.833\cdot \mathrm{n}=450 \quad \Leftrightarrow$$

$$n=\frac{450}{1.875}\approx 240\ días$$

1B.07

$$\mathrm{d}=3800\sqrt{h}=3800\sqrt{2}\approx 5370\ m$$

$$\mathrm{d}=3800\sqrt{h}=3800\sqrt{40}\approx 24\,000\ m$$

Y la cima de la montaña se puede ver a una distancia de aproximadamente:

$$\mathrm{d}=3800\sqrt{h}=3800\sqrt{1000}\approx 120\,000\ m=120\ km$$

1B.08

200 000 es 125%.

Exclusiva de 25% IVA: $\frac{200\,000}{1.25}=160\,000$

Y por un coche: $\frac{160\,000}{2}=80\,000\ dólares$

1B.09

$$E=250+\frac{n}{2}(n+4)=250+\frac{8}{2}(8+4)=298\ mill.\ libras$$

$$E = 250 + \frac{n}{2}(n+4) = 250 + \frac{12}{2}(12+4) = 346\ mill.\,libras$$

$$450 = 250 + \frac{n}{2}(n+4) \qquad =>$$

$$450 = 250 + \frac{n^2}{2} + 2n \Leftrightarrow$$

$$n^2 + 4n - 400 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-400)}}{2 \cdot 1} \qquad \Leftrightarrow$$

$n = 18 \quad y \quad n = -22 \quad =>$ -22 no es relevante.

$$n = 16\ pisos\ son\ posibles$$

1B.10

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{9.82}} = 4.48\ segundos$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9.82}} = 6.34\ segundos$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{15}{9.82}} = 7.77\ segundos$$

1B.11

ϱ y m son directamente proporcionales.
ϱ y V son inversamente proporcionales.

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{15}{0.002} = 7500\ \frac{kg}{m^3}$$

1B.12

- Intervalo de masa = [15 ; 20[kg.
- 15 kg $\leq$ Masa $<$ 20 kg

1B.13

1 hora son 60 minutos y 1 minuto son 60 segundos. Entonces:

$90\,\frac{m^3}{h} = \frac{90}{60 \cdot 60} = 0.025\,\frac{m^3}{s}\,(metro\ cúbico\ por\ segundo)$

Comienzo: $0.5\ (para\ promedio) \cdot 0.025\left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot 20(s) = 0.25\,m^3$

Correr: $0.025\left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot (12 \cdot 60)(s) = 18\,m^3$

Parada: $0.5\ (para\ promedio) \cdot 0.025\left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot 40(s) = 0.5\,m^3$

Suma: $0.025 + 18 + 0.5 = 18.75\,m^3$

1B.14

Masa total: $12 \cdot 12 + 22 \cdot 1 + 11 \cdot 16 = 342\,u$

Carbón: $\frac{12 \cdot 12}{342} = \frac{144}{342} \approx 0.421 \approx 42.1\%\ masa$

Hidrógeno: $\frac{22 \cdot 1}{342} \approx 0.0643 \approx 6.4\%\ masa$

Oxígeno: $\frac{11 \cdot 16}{342} \approx 0.515 \approx 51.5\%\ masa$

Control: $42.1 + 6.4 + 51.5 = 100\%$, ok

1B.15

Masa total: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 16 = 18\,u$

Hidrógeno: $\frac{2\cdot 1}{18} \approx 0.111 \approx 11.1\%\,masa$

Oxígeno: $\frac{1\cdot 16}{18} \approx 0.889 \approx 88.9\%\,masa$

Control: $11.1 + 88.9 = 100\%$, ok

Parte 2.

Sección A – soluciones propuestas

2A.001

$|-5| = 5$

$|5| = 5$

$|0| = 0$

$|\frac{1}{2} + 4| = \frac{9}{2}$

$|\frac{1}{2} - 4| = \frac{7}{2}$

$|-a| = a$

$|-ab| = ab$

$|-5 + 2| = 3$

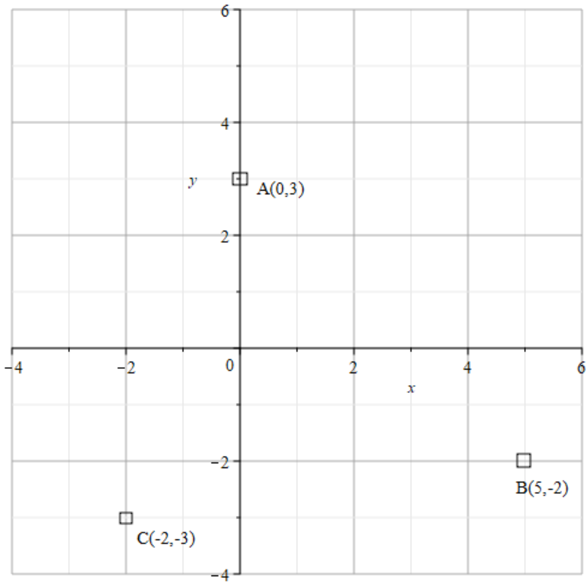
$|-7 - 5| = 12$

$|-7 + 5| = 2$

$|-\frac{11}{4}| = \frac{11}{4}$

$|-5018| = 5018$

2A.002



$|AB|^2 = (5-0)^2 + (-2-3)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|AB| = \sqrt{(5-0)^2 + (-2-3)^2} \quad \Leftrightarrow$

$$|AB| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{25 + 25} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{50} \qquad \approx 7.07$$

$$|BC|^2 = (-2-5)^2 + (-3-(-2))^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$|BC| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|BC| = \sqrt{49 + 1} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|BC| = \sqrt{50} \qquad \approx 7.07$$

$$|AC|^2 = (-2-0)^2 + (-3-3)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{4 + 36} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{40} \qquad \approx 6.3$$

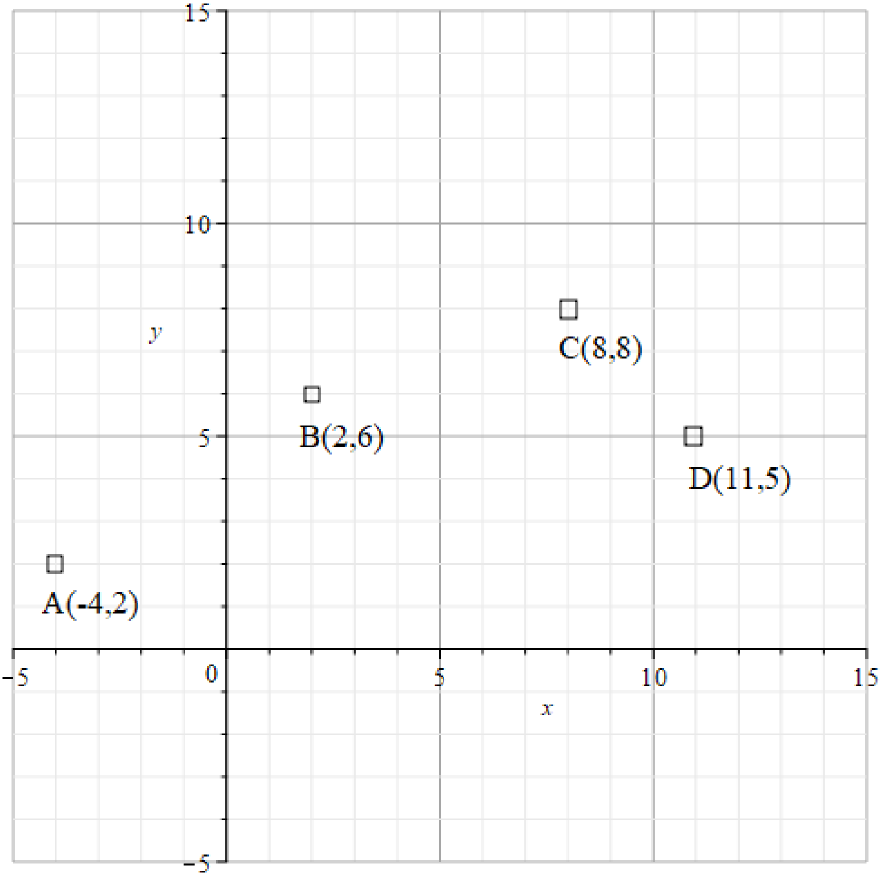
$$|CA|^2 = (0-(-2))^2 + (3-(-3))^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$|CA| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|CA| = \sqrt{4 + 36} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|CA| = \sqrt{40} = |AC| \qquad \approx 6.3$$

2A.003



$$|AB| = [(2-(-4))^2 + (6-2)^2]^{½} = 52^{½} = \sqrt{52} \approx 7.2$$

$$|BC| = [(8-2)^2 + (8-6)^2]^{½} = 40^{½} \approx 6.32$$

$$|CD| = [(11-8)^2 + (5-8)^2]^{½} = 18^{½} \approx 4.24$$

$$|DA| = [(11-(-4))^2 + (5-2)^2]^{½} = 234^{½} \approx 15.3$$

$$|AC| = [(8-(-4))^2 + (8-2)^2]^{½} = 180^{½} \approx 15.3$$

$$|BD| = [(11-2)^2 + (5-6)^2]^{½} = 82^{½} \approx 9.06$$

2A.004

$y = a(x - x_1) + y_1$

dónde $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{2-(-4)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

y $(x_1, y_1) = (-4,2)$ se elige el punto A

entonces $y = \frac{2}{3}(x - (-4)) + 2 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} + \frac{6}{3} \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

2A.005

l_1 : $y = 2x + 5$

l_2 : $y = 6x - 3$

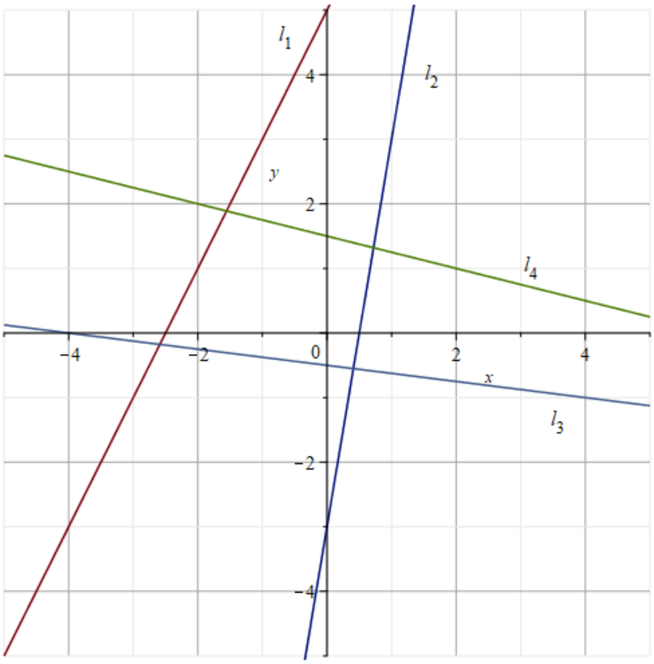
l_3 : $y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$

l_4 : $y = -\frac{1}{4}x + b$ P insertada =>

$1 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b \quad \Leftrightarrow$

$b = \frac{3}{2}$ =>

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

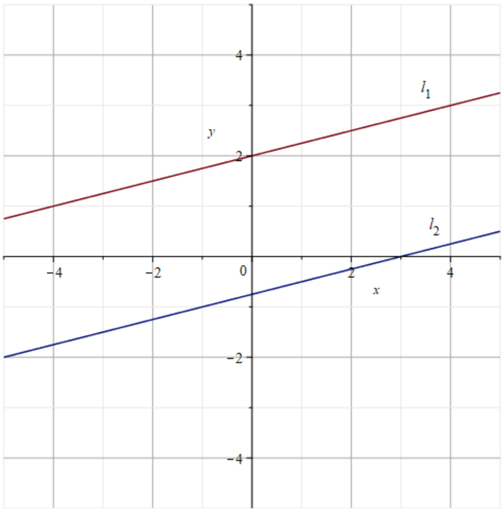


Aquí bosquejado por CAS. También se puede dibujar a mano utilizando las coordenadas encontradas mediante inserción, por ejemplo para l_1:

x	0	1	2	-1	-2	Etc.
y	5	7	9	3	1	

$a_{l2} \cdot a_{l3} = 6 \cdot (-\frac{1}{8}) = -\frac{6}{8} \neq -1$ => no ortogonal

2A.006



(Figura no necesaria).

l_1: *pendiente* $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{4-(-4)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ => $y = \frac{1}{4}x + b$

Punto (4,3) insertada $3 = \frac{4}{4} + b$ => $b = 2$

entonces $y = \frac{1}{4}x + 2$

l_2: *pendiente igual* $a = \frac{1}{4}$ => $y = \frac{1}{4}x + b$

(3,0) insertada $0 = \frac{3}{4} + b$ => $b = -\frac{3}{4}$

entonces $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

2A.007

$y = a(x - x_1) + y_1$

l: dónde $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{3-0} = 1$

y $(x_1, y_1) = (0,0)$ Punto O insertada

entonces $y = 1(x-0) + 0$ $\Leftrightarrow$

$y = x$

m: dónde $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4-2}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

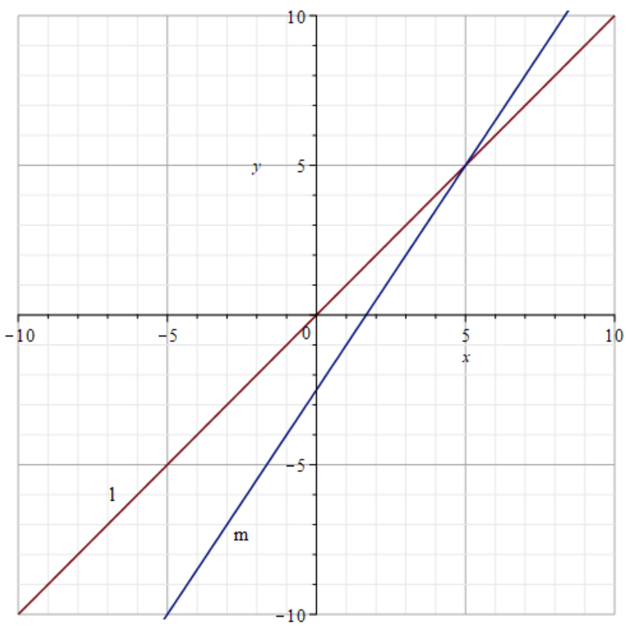
y $(x_1, y_1) = (3,2)$ Punto Q insertada

entonces $y = \frac{3}{2}(x-3) + 2$ $\Leftrightarrow$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{4}{2}$ $\Leftrightarrow$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

Diferentes pendientes (1 y $\frac{3}{2}$) => no paralelas



2A.008

l_1: $2x + 4y - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$4y = -2x + 14 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \qquad pendiente = -\frac{1}{2}$

l_2: $pendiente\ también = -\frac{1}{2} \quad =>$

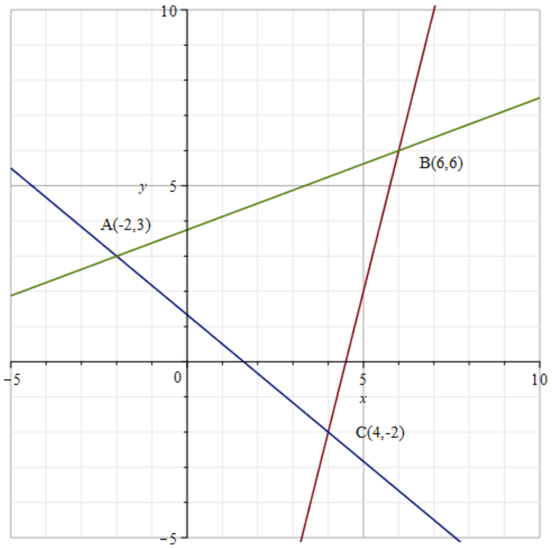
$y = -\frac{1}{2}x + \mathrm{b}$ (5,7) insertada =>

$7 = -\frac{1}{2}5 + \mathrm{b} \quad \Leftrightarrow$

$b = \frac{14}{2} + \frac{5}{2} = \frac{19}{2} \quad =>$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2}$

2A.009



Línea a través AC: $a = \frac{-2-3}{4-(-2)} = \frac{-5}{6}$

$y = ax + b$ con a y punto A:

$3 = -\frac{5}{6}(-2) + b$ ⇔

$b = \frac{4}{3}$ =>

$y_{AC} = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3}$

Línea a través AB: $a = \frac{6-3}{6-(-2)} = \frac{3}{8}$

$y = ax + b$ con a y punto B:

$6 = \frac{3}{8}6 + b$ ⇔

$b = \frac{15}{4}$ =>

$y_{AB} = \frac{3}{8}x + \frac{15}{4}$

Línea a través BC: $a = \frac{-2-6}{4-6} = \frac{-8}{-2} = 4$

$y = ax + b$ con a y punto C:

$-2 = 4 \cdot 4 + b$ ⇔

$b = -18$ =>

$y_{BC} = 4x - 18$

2A.010

y es cero en el eje x: => $2x - 0 = 4$

$x = 2$

Por tanto, intersección con el eje x en el punto (2,0)

x es cero en el eje y: => $2 \cdot 0 - y = 4$

⇔ $y = -4$

Por tanto, intersección con el eje y en el punto (0,-4)

2A.011

$3x - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 4y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{4}x$

$kx + 3y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -kx + 12 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{k}{3}x + 4$

Paralelo para: $\frac{3}{4} = -\frac{k}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{9}{4}$

Ortogonal para: $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{k}{4} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$

2A.012

Intersección para: $y_{l1} = y_{l2}$ =>

Y usando los lados derechos de las ecuaciones:

$$\frac{3}{4}x + 1 = \frac{3}{7}x + \frac{22}{7} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{21}{28}x - \frac{16}{28}x = \frac{22}{7} - \frac{7}{7} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{21}{28}x = \frac{15}{7} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 12$$

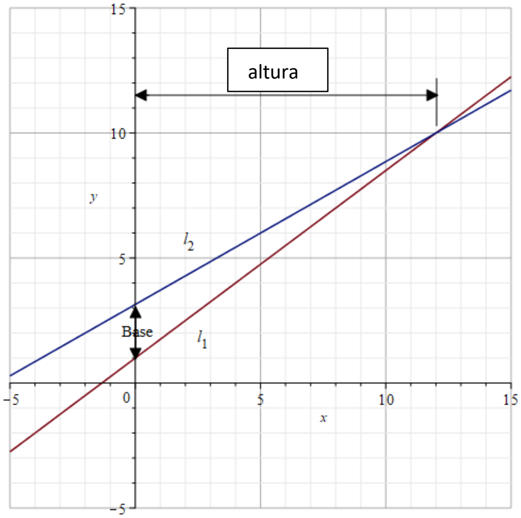
El cual se inserta en la ecuación para l_1 o l_2, aquí elegimos l_1:

$$y = \frac{3}{4}12 + 1 = 10 \qquad =>$$

Punto de intersección: (12,10)

La intersección con el eje y es para x = 0 que se inserta =>

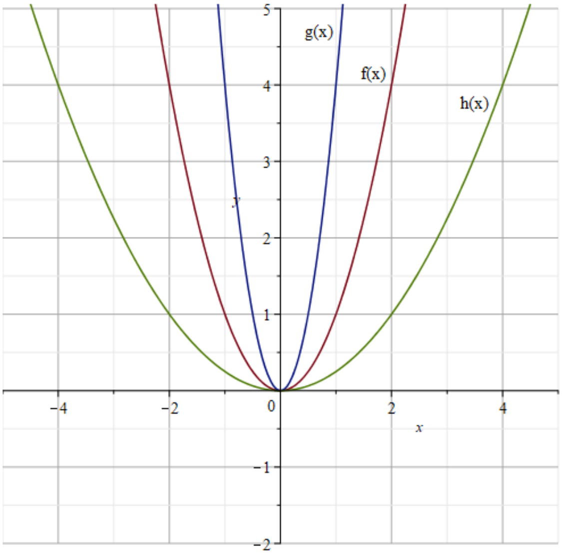
$y_{l1} = 1$ y $y_{l2} = \frac{22}{7}$



$$Aréa\ de\ triangulo = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura \qquad =>$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{22}{7} - \frac{7}{7}\right) \cdot 12 = \frac{90}{7}$$

2A.013

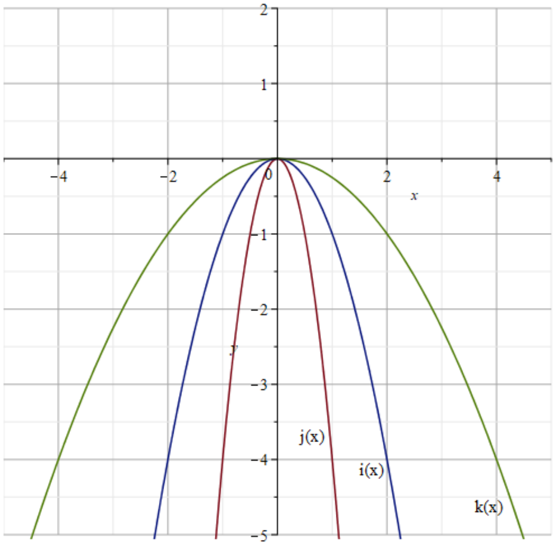


$f(x) = x^2$ $g(x) = 4x^2$ $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

Aquí bosquejado por CAS. También se puede dibujar a mano utilizando coordenadas encontradas mediante inserción, por ejemplo para f(x):

x	0	1	2	-1	-2	Etc.
f(x)	0	1	4	1	4	

2A.014



$i(x) = -x^2$ $\qquad$ $j(x) = -4x^2$ $\qquad$ $k(x) = -\frac{1}{4}x^2$

2A.015

y es cero en el eje x: =>

$x^2 - 2x - 8 = 0$ ⇔

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = 4 \;\; y \;\; -2$ =>

Intersección en puntos (4,0) y (-2,0)

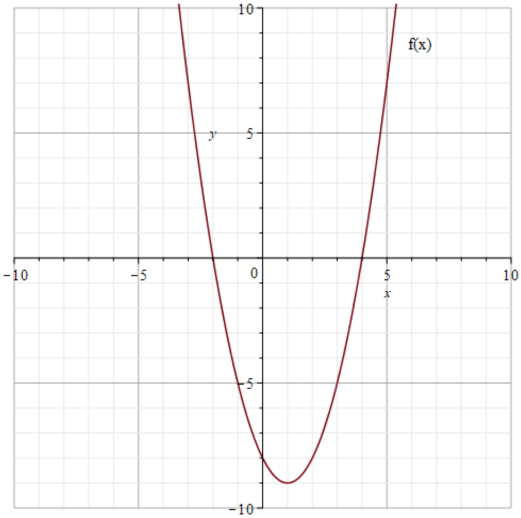
x es cero en el eje y: =>

$f(x) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8$ ⇔

$f(x) = -8$ =>

Intersección en puntos (0,-8)

Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{2}{2 \cdot 1}, \frac{-36}{4 \cdot 1}\right) = (1, -9)$



2A.016

Intersección para: $y_{linéa} = y_{parábola}$ =>

Y usando los lados derechos de las ecuaciones:

$$-x - 2 = 2x^2 + 6x - 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 7x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

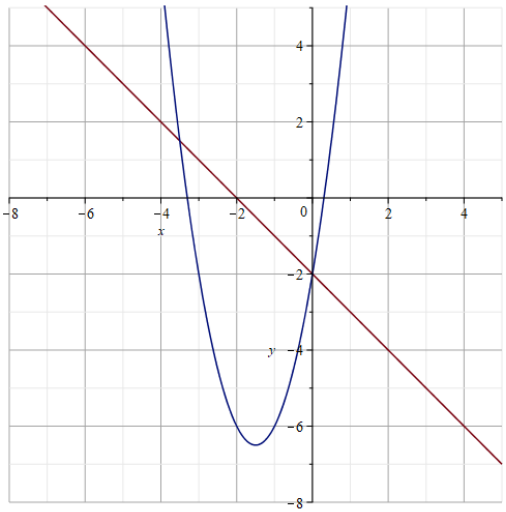
$$x(2x + 7) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = -\frac{7}{2} \quad =>$$

Y dado que los puntos de intersección cumplen ambas ecuaciones, y se encuentra mediante inserción en cualquiera de las ecuaciones (recta o parábola). Aquí elegimos la ecuación de la recta, que es más sencilla:

$$y_1 = -2 \quad e \quad y_2 = -\left(-\frac{7}{2}\right) - \frac{4}{2} = \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

Por lo tanto intersección en puntos (0,-2) y $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$



Complimiento.

2A.017

Se Cruzan por $\quad x^2 - 4x - 4 = 2x^2 + \mathrm{x} \qquad \Leftrightarrow$

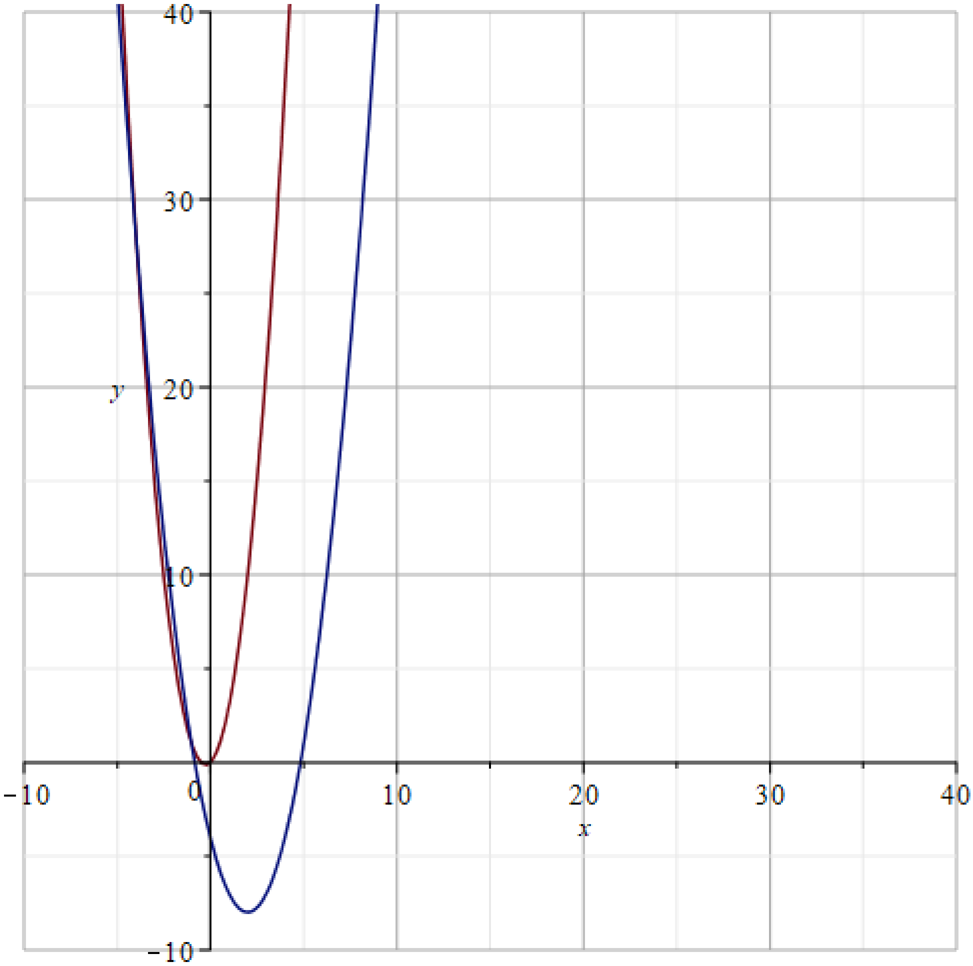
$$x^2 + 5\mathrm{x} + 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1 \quad y \quad x_2 = -4 \qquad =>$$

Y por inserción $\quad y_1 = 1 \quad e \quad y_2 = 28 \qquad \Leftrightarrow$

Por lo tanto intersección en puntos (-1,1) y $(-4, 28)$



No es fácil leer los puntos de intersección, pero parece encajar con el cálculo.

2A.018

$2x = -2x^2 + y \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 2x^2 + 2x$

$4 = -x + x^2 + y \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -x^2 + x + 4$

x coordenadas de intersección

$$2x^2 + 2x = -x^2 + x + 4$$

$$3x^2 + \mathrm{x} - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

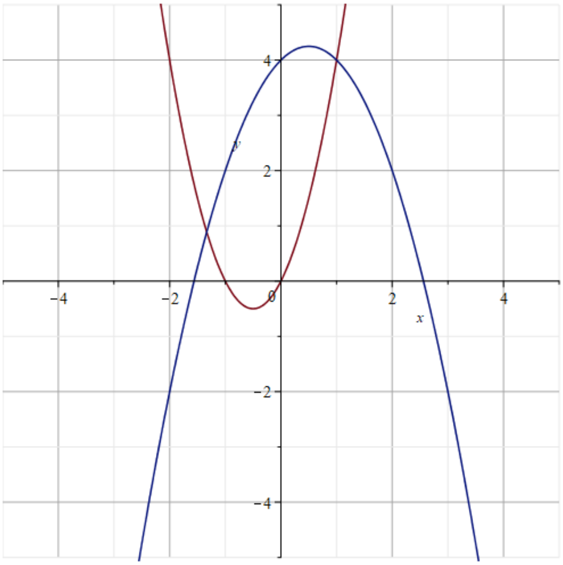
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1 \quad y \quad x_2 = -\frac{4}{3} \qquad =>$$

Y por inserción en la primera ecuación (cualquiera servirá)

$$y_1 = 4 \quad e \quad y_2 = 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

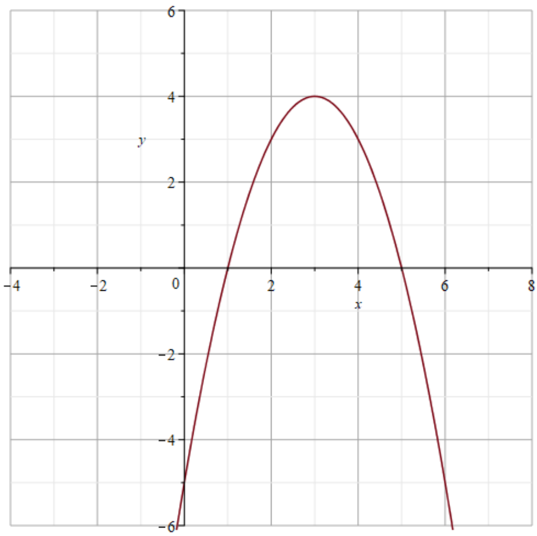
Por lo tanto intersección en puntos (1,4) y $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{9}\right)$



Complimiento.

2A.019

$$y = -x^2 + 6x - 5$$



Lecturas: Intersección del eje x en (1,0) y (5,0)

Intersección del eje y en (0,-5)

Vértice en (3,4)

La recta horizontal y = 5 no cortará la parábola

Cálculos:

y es cero en el eje x =>

$-x^2 + 6x - 5 = 0$ ⇔

$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = 5 \ y \ 1$ =>

Intersección en puntos (5,0) y (1,0)

x es cero en el eje y: =>

$y = 0^2 + 6 \cdot 0 - 5$ ⇔

$y = -5$ =>

Intersección en puntos (0,-5)

Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-6}{2\cdot(-1)}, \frac{-16}{4\cdot(-1)}\right) = (3{,}4)$

Para y = 5 => $5 = -x^2 + 6x - 5$ $\Leftrightarrow$

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} = sin\ solución$ =>

Sin intersección

Cumplimiento total de lecturas versus cálculos.

2A.020

$f(x) = x^2 - x - 6$ raíces $x^2 - x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

$x_1 = 3 \quad y \quad x_2 = -2$

Entonces con factor 1 => $f(x) = (x-3)(x+2)$

$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$ raíces $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x^2 - 4x - 32 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot(-32)}}{2\cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

$x_1 = 8 \quad y \quad x_2 = -4$

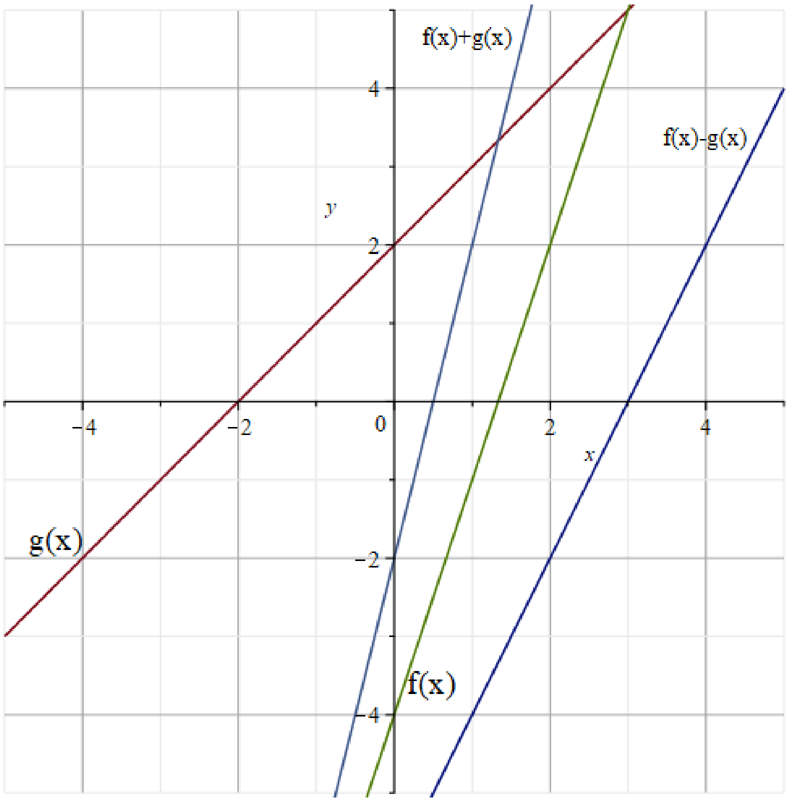
Entonces con factor $\frac{1}{4}$ => $f(x) = \frac{1}{4}(x-8)(x+4)$

2A.021

$f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x + 2$ =>

$f(x) + g(x) = 3x - 4 + (x + 2) = 4x - 2$

$f(x) - g(x) = 3x - 4 - (x + 2) = 2x - 6$



2A.022

$f(g(x)) = 3(x + 2) - 4 = 3x + 2 = h(x)$

$h(x) = 3x + 2$ ⇔

$x = \frac{h(x)-2}{3}$ => y formando la función inversa:

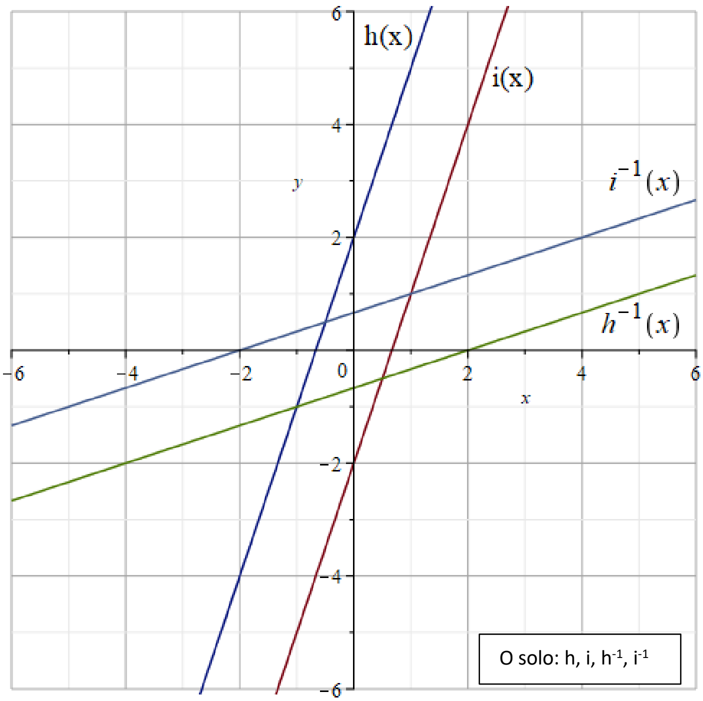
$h^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

$g(f(x)) = (3x-4)+2 = 3x-2 = i(x)$

$i(x) = 3x-2$ ⇔

$x = \frac{i(x)+2}{3}$ => y formando la función inversa:

$i^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$



2A.023

Comprobado por Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$

Aquí $2^2 + 3^2 = 3.8^2 \quad \Leftrightarrow$

$13 = 14.44 \quad =>$

Falsa, no en ángulo recto

$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow$

$9 + 16 = 25 \quad \Leftrightarrow$

$25 = 25$ verdad $\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

$|AB| = ((5-2)^2 + (4-3)^2)^{½} = 10^{½}$

$|BC| = ((10-5)^2 + (0-4)^2)^{½} = 41^{½}$

$|CA| = ((2-10)^2 + (3-0)^2)^{½} = 73^{½} \quad =>$

$(10^{½})^2 + (41^{½})^2 = (73^{½})^2 \quad \Leftrightarrow$

$10 + 41 = 73$ Falsa, no en ángulo recto

$|DE| = ((2-0)^2 + (4-0)^2)^{½} = 20^{½}$

$|EF| = ((10-2)^2 + (0-4)^2)^{½} = 80^{½}$

$|FD| = ((0-10)^2 + (0-0)^2)^{½} = 100^{½} \quad =>$

$(20^{½})^2 + (80^{½})^2 = (100^{½})^2 \quad \Leftrightarrow$

$20 + 80 = 100$ true $\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 80 = 800$

2A.024

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 9 \quad \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad =>$

Entonces, centro C(3,-2) y radio = 3

$y^2 - 12y = -x^2 - 16x \quad \Leftrightarrow$

$x^2 + 16x + y^2 - 12y = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(x^2 + 16x + 64) + (y^2 - 12y + 36) = 64 + 36 \quad \Leftrightarrow$

$(x+8)^2 + (y-6)^2 = 100 \quad =>$

C(3,-2) y r = 3

$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y = 12 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6 \quad \Leftrightarrow$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 6 + 1 + 9 \quad \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16 \quad =>$

C(1,-3) y r = 4

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 6x + y^2 + 4y = -20 \quad \Leftrightarrow$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -20 + 9 + 4 \quad \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y+2)^2=-7$ =>

El lado derecho es negativo => no hay círculo

2A.025

$x^2+y^2+12x+35=0$ ⇔

$(x^2+12x+36)+(y-0)^2=-35+36$ ⇔

$(x+6)^2+(y-0)^2=1$ =>

A circle with C(-6,0) and r = 1

$x^2+12x+y^2=-36$ ⇔

$(x^2+12x+36)+(y-0)^2=-36+36$ ⇔

$(x+6)^2+(y-0)^2=0$ =>

Sin radio => sin círculo, solo un punto C(-6,0)

$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2-x+\frac{3}{2}y+\frac{35}{2}=0$ ⇔

$x^2+y^2-4x+6y=-70$ ⇔

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=-70+4+9$ ⇔

$(x-2)^2+(y+3)^2=-57$ =>

El lado derecho es negativo => no hay círculo

2A.026

C(7,-4) P(36,41) Q(50,-30)

$|CP| = ((36-7)^2 + (41+4)^2)^{½} = 53.5 = r$ =>

No, la circunferencia con r = 52 no pasa por el punto P.

$|CQ| = ((50-7)^2 + (-30+4)^2)^{½} = 50.2 = r$ =>

No, la circunferencia con r = 52 no pasa por el punto Q.

2A.027

C(-3,2) y r = 4 =>

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$

P(1,4) Q(-5,-4) R(1,2) se colocan en el círculo si se cumple Pitágoras para la distancia de C al punto, es decir, si $dist.^2 = 16$

P(1,4)	$(1-(-3))^2 + (4-2)^2 = 20$	=>	No
Q(-5,-4)	$(-5-(-3))^2 + (-4-2)^2 = 40$	=>	No
R(1,2)	$(1-(-3))^2 + (2-2)^2 = 16$	=>	Sí

$Circunferencia = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 25.1$

$A = \pi r^2 = \pi \cdot 16 = 16\pi \approx 50.3$

2A.028

C(2,5) y P(-3,-7)

La ecuación del círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

dónde $\quad (a, b) = (2,5)$

y $|CP|$ es radio => Pitágoras:

$|CP|^2 = (-3-2)^2 + (-7-5)^2 = 169 = 13^2 = r^2$

Así que aquí $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 13^2$

y = 0 en el eje x, que se inserta:

$(x-2)^2 + (0-5)^2 = 13^2 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x - 144 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-144)}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$x_1 \approx 14.2 \;\; y \;\; x_2 \approx -10.2 \quad =>$

Intersectando así el eje x en puntos (-10.2 , 0) y (14.2 , 0)

x = 0 en el eje y, que se inserta:

$(0-2)^2 + (y-5)^2 = 13^2 \quad \Leftrightarrow$

$y^2 - 10y - 140 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot (-140)}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$y_1 \approx 17.8 \;\; y \;\; y_2 \approx -7.85 \quad =>$

Intersectando así el eje y en puntos (0 , -7.85) y (0 , 17.8)

2A.029

$x^2 - x + y^2 + y = 5 \quad \Leftrightarrow$

$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + y + \frac{1}{4}) = \frac{20}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow$

$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{11}{2}$ =>

$C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

Una recta n que pasa por $C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ y es perpendicular a la tangente ($y=\frac{4}{3}x+\frac{23}{6}$), tiene la pendiente
$a=-\frac{3}{4}$ $(since\ \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$), y la ecuación:

Fórmula $y=a(x-x_1)+y_1$ =>

Aquí $y=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ ⇔

$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$ que es la línea n

El punto donde se cruzan la recta tangente del nuevo círculo y la recta n es un punto del círculo, por lo tanto, dos ecuaciones con dos incógnitas para encontrar el punto:

$y=\frac{4}{3}x+\frac{23}{6}$ y $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$ =>

$\frac{4}{3}x+\frac{23}{6}=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$ ⇔

$\frac{16}{12}x+\frac{9}{12}x=-\frac{184}{48}-\frac{6}{48}$ ⇔

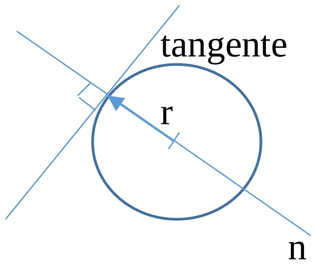
$\frac{25}{12}x=-\frac{190}{48}$ ⇔

$x=-1.9$ => $y=1.3$ => punto en el círculo: (-1.9, 1.3)

Entonces el radio^2 será $(-1.9-0.5\ )^2+(1.3+0.5\ )^2=9$
Y radio $r=3$

Y el circulo $(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=3^2$

Un boceto aproximado:



2A.030

Números precisos de la tabla:

cos 60° = $\frac{1}{2}$ = 0.5 sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≈ 0.866 cos45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ≈ 0.707

sin 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ≈ 0.707 cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≈ 0.866 sin 30° = $\frac{1}{2}$ = 0.5

cos 90° = 0 sin 90° = 1

Números decimales de CAS:

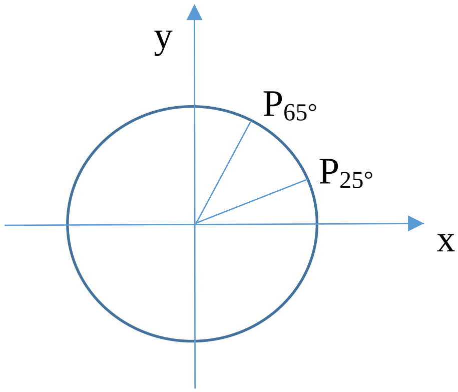
cos 100° ≈ -0.174 sin 100° ≈ 0.985

cos 135° ≈ -0.707 sin 135° ≈ 0.707

2A.031

$P_{65°}$ = (cos 65° , sin 65°) ≈ (0.423 , 0.906)

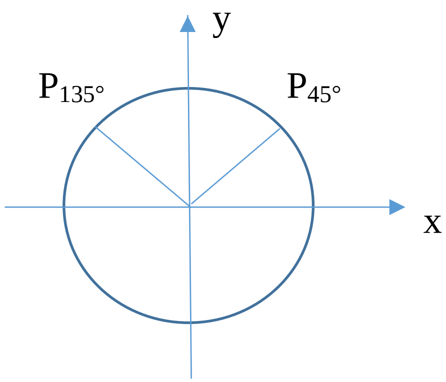
$P_{25°}$ = (cos 25° , sin 25°) ≈ (0.906 , 0.423)



2A.032

$P_{45°}$ = (cos 45° , sin 135°) ≈ (0.707 , 0.707)

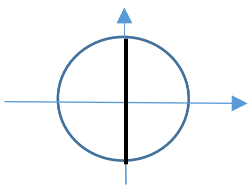
$P_{135°}$ = (cos 135° , sin 135°) ≈ (-0.707 , 0.707)



2A.033

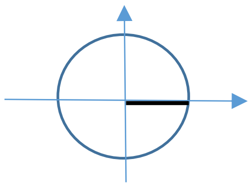
cos v = 0 =>

v = $\cos^{-1}$ 0 = 90° or 270°



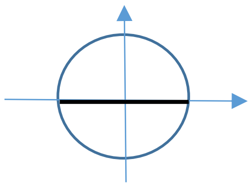
$\cos v = 1 \quad =>$

$v = \cos^{-1} \ = 0°$



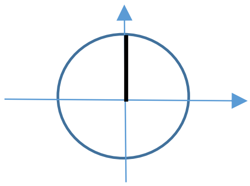
$\sin v = 0 \quad =>$

$v = \sin^{-1} 0° = 0°$ or $180°$



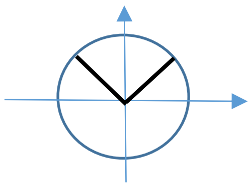
$\sin v = 1 \quad =>$

$v = \sin^{-1} 1 = 90°$



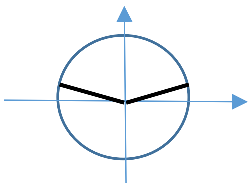
$\sin v = 0.707 \quad =>$

$v = \sin^{-1} 0.707 \approx 45°$ or $135°$



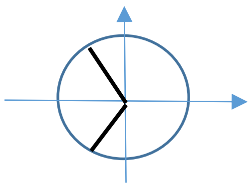
$\sin v = 0.342 \quad =>$

$v = \sin^{-1} 0.342 \approx 20°$ or $160°$



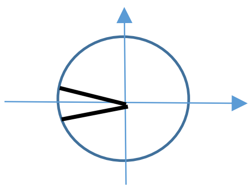
$\cos v = -0.5 \quad =>$

$v = \cos^{-1} (-0.5) = 120°$ or $240°$



$\cos v = -0.94 \quad =>$

$v = \cos^{-1} (-0.94) \approx 160°$ or $200°$



 ISBN 978-87-975307-3-3

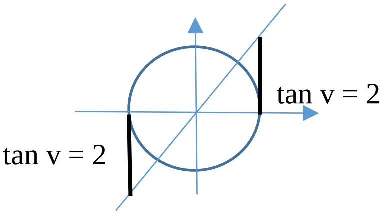
2A.034

tan 20° ≈ 0.364　　　　tan 100° ≈ - 5.67

sin 20° ≈ 0.342　　　　cos 135° ≈ - 0.707

2A.035

CAS:　　$\tan^{-1} 2 \approx 63.4°$ or $243.4°$



2A.036

$$\frac{ángulo\ en\ rad}{2\pi} = \frac{ángulo\ en\ grados}{360} \Rightarrow \text{Aquí: } v_{rad} = \frac{2\pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} rad$$

$$\frac{ángulo\ en\ rad}{2\pi} = \frac{ángulo\ en\ grados}{360} \Rightarrow \text{Aquí: } v_{rad} = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2} rad$$

2A.037

$$\frac{ángulo\ en\ rad}{2\pi} = \frac{ángulo\ en\ grados}{360} \Rightarrow \text{Aquí: } v_{gr} = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = 60°$$

$$\frac{ángulo\ en\ rad}{2\pi} = \frac{ángulo\ en\ grados}{360} \Rightarrow \text{Aquí: } v_{gr} = \frac{360 \cdot \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = 135°$$

2A.038

$360°\ o\ 2\pi\ radián$

2A.039

$180° = \pi \; radián$

y: $\quad$ *longitud del arco = ángulo · radio* $\quad$ =>

aquí: $\quad longitud\ del\ arco = \ \pi \cdot 40$ $\quad$ ⇔

$\color{red}{longitud\ del\ arco \approx 126\, metro}$

2A.040

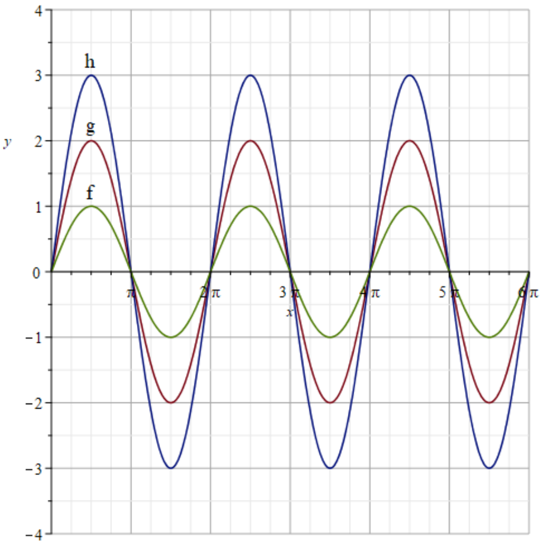
$$v_{rad} = \frac{2\pi \cdot 270}{360} = \frac{3\pi}{2} radián$$

y: $\quad$ *longitud del arco = ángulo · radio* $\quad$ =>

aquí: $\quad longitud\ del\ arco = \frac{3\pi}{2} \cdot 0.8$ $\quad$ ⇔

$\color{red}{longitud\ del\ arco \approx 3.77\, metro}$

2A.041

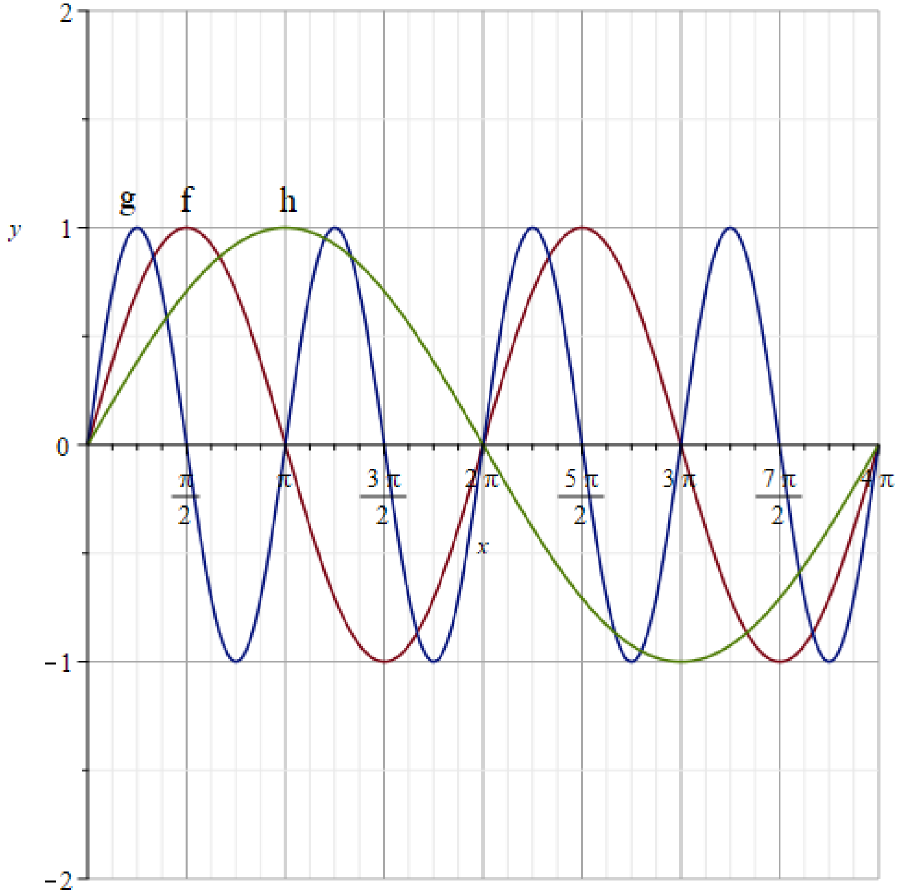


f = sin x　　amplitud = |a| = 1　　período = 2π

g = 2sin x　　amplitud = |a| = 2　　período = 2π

h = 3sin x　　amplitud = |a| = 3　　período = 2π

2A.042



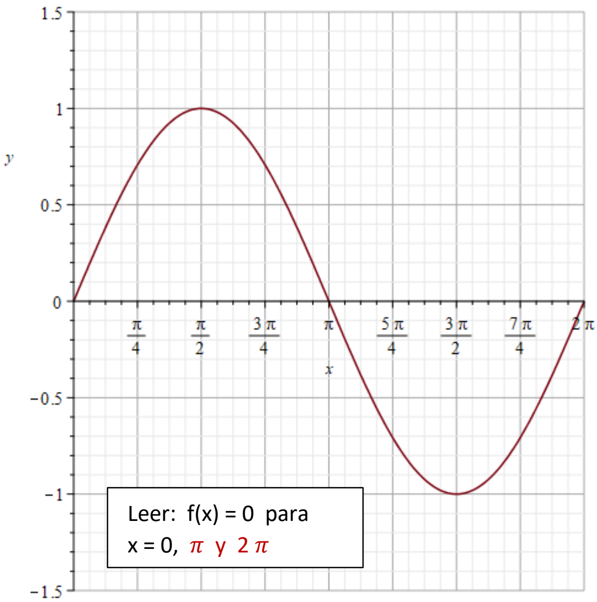
f = sin x　　amplitud = |a| = 1　　período = 2π

g = sin 2x　　amplitud = |a| = 1　　período = π

h = $\sin \frac{1}{2}x$　　amplitud = |a| = 1　　período = 4π

2A.043

$f(x) = \sin x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

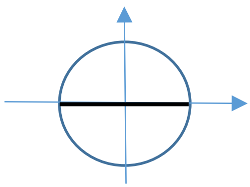


Cálculo:

$f(x) = 0$ =>

sin x = 0 =>

x = $\sin^{-1} 0 = 0$ y π y 2π

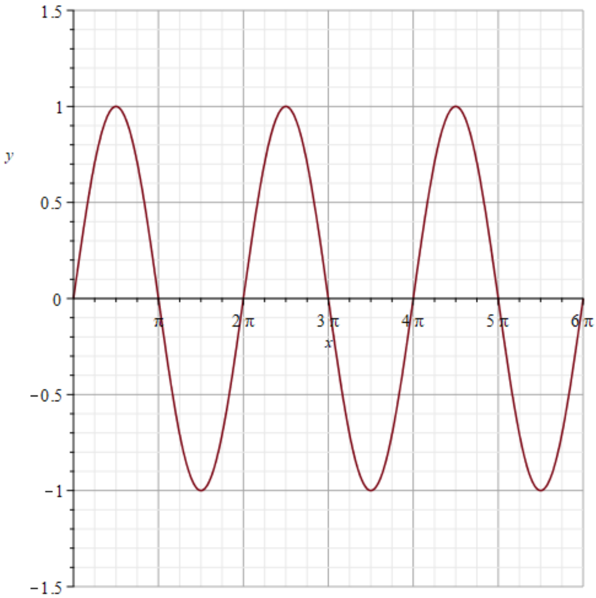


(Algunos CAS solo muestran una solución, por lo que es mejor usar el círculo unitario como se muestra).

Cumplimiento para lectura y cálculo.

2A.044

$f(x) = \sin x$ para $0 \leq x \leq 6\pi$



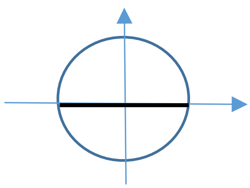
Aquí leemos x = 0 y π y 2π y más, periódicamente.

Cálculo:

$f(x) = 0$ =>

sin x = 0 =>

x = $\sin^{-1}$ 0 rad = 0 y π y 2π



Algunos CAS solo muestran una solución, por lo que durante un período la solución debe observarse desde el círculo unitario como se muestra. Para más períodos tenemos que expandir usando un número entero (un número entero (negativo, cero y positivo)) p (p para período), que aquí es de 0 a 6:

$x = p\pi \quad donde\ p\ es\ un\ número\ entero\ de\ 0\ a\ 6$

cual es la respuesta completa.

O con símbolos de la teoría de conjuntos:

$x = p\pi \quad donde \quad p \in Z \; en \; el \; intervalo \; [0\,,6]$

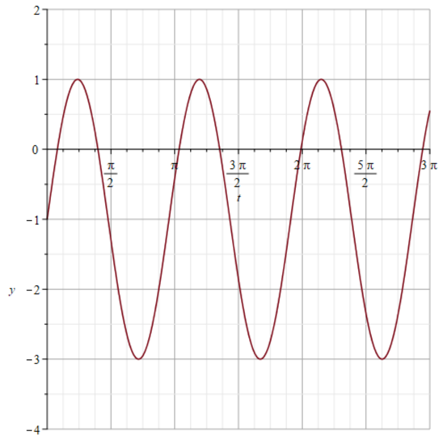
Z es el símbolo de todos los números enteros.

Cumplimiento para lectura y cálculo.

2A.045

$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad => \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \qquad =>$

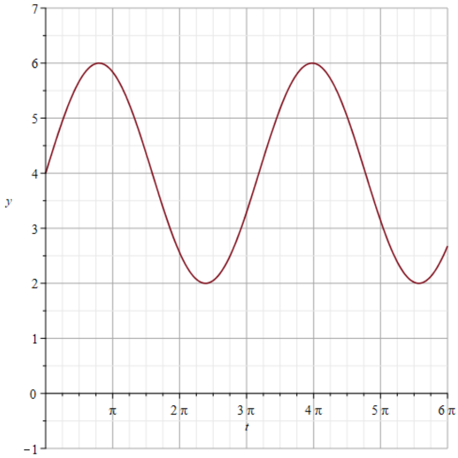
$f(t) = 2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}t) - 1$



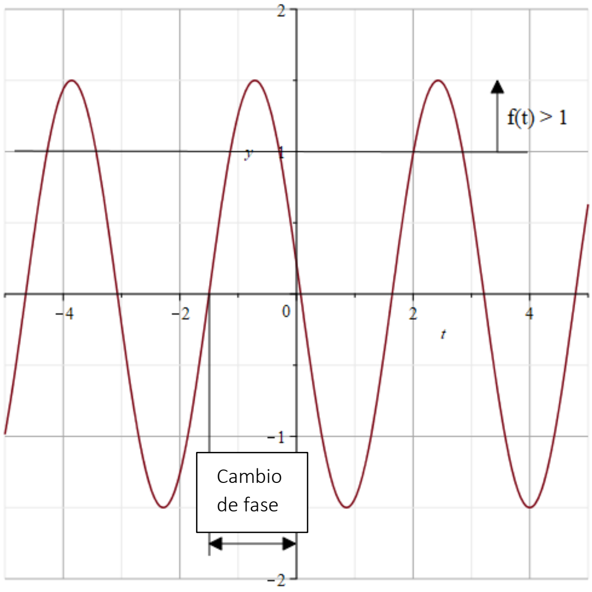
2A.046

$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad => \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \qquad =>$

$f(t) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{5}t) + 4$



2A.047



$Cambio\ de\ fase = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{3}{2} = -1.5$ cumplimiento

El período se lee: $T \approx 3.1$ (por ejemplo, de arriba a arriba)

El período calcula: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ cumplimiento

2A.048

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3)$

Punto $(5.5\ ,\ 1.5)$ insertada =>

$1.5 = 1.5 \cdot \sin(2 \cdot 5.5 + 3)$ ⇔

$1.5 = 1.5$ verdad => sí

2A.049

$2 + (\tan x)^2 = 2 + \tan x$ donde $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ⇔

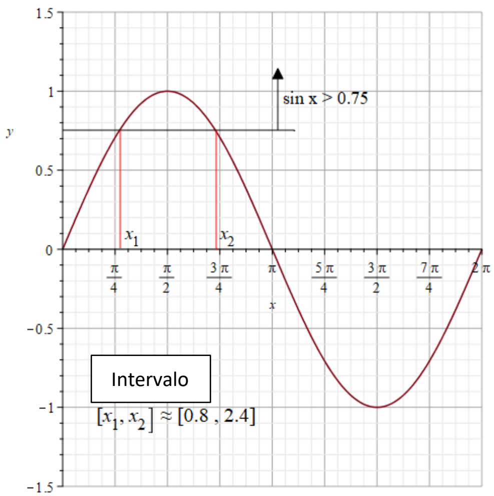
$(\tan x)^2 - \tan x = 0$ ⇔

$\tan x(\tan x - 1) = 0$ ⇔

$\tan x = 0 \quad o \quad \tan x = 1$ =>

$x = 0 \quad o \quad x = \frac{\pi}{4}$

2A.050



$\sin x = 0.75$ $\Leftrightarrow$

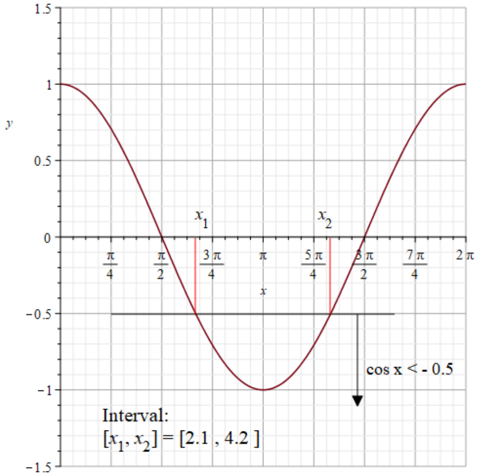
$x_1 = sin^{-1}0.75 \approx 0.85$ y debido a la simetría:

$x_2 = \pi - 0.85 = 2.29$ =>

$Intervalo\text{:}\ [x_1\,, x_2] \approx [0.85\,, 2.29]$

Teniendo en cuenta que la lectura aquí es incierta, podemos concluir que existe cumplimiento.

2A.051



$\cos x = -0.5$ $\Leftrightarrow$

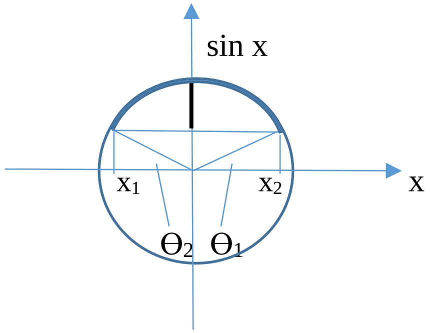
$x_1 = cos^{-1}(-0.5) \approx 2.09$ y debido a la simetría:

$x_2 - \pi = \pi - x_1$ $\Leftrightarrow$

$x_2 = \pi + \pi - x_1 = 2\pi - 2.09 \approx 4.19$ =>

$Intervalo\text{:}\ [x_1\,, x_2] \approx [2.09\,, 4.19]$

2A.052



x_1 se lee hacia - 0.9

x_2 se lee hacia 0.9 =>

Dominio ≈]- 0.9 , 0.9[

$\sin \Theta = 0.5$ =>

$\Theta = \frac{\pi}{6}(30°)\ \ o\ \ \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ \ (150°)$ =>

$\Theta_1 = \frac{\pi}{6}\ \ y\ \ \Theta_2 = \frac{5\pi}{6}$

$x_1 = \cos\frac{5\pi}{6}\ \ y\ \ x_2 = \cos\frac{\pi}{6}$ ⇔

$x_1 \approx -0.866\ \ y\ \ x_2 \approx 0.866$ =>

$Dominio =]-0.866\,, 0.866\,[$

2A.053

Resuelve la siguiente ecuación para $0 \leq x \leq \pi$

$1 = \frac{3\sin x + 1}{4(\sin x)^2 + 1}$ ⇔

$4(\sin x)^2 + 1 = 3\sin x + 1$ ⇔

$4(\sin x)^2 - 3\sin x = 0$ ⇔

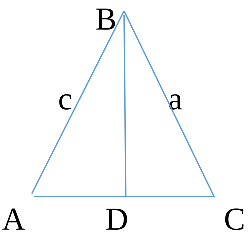
$\sin x\,(4\sin x - 3) = 0$

y usando la solución cero:

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad o \quad x = \pi$

$4\sin x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0.848 \quad o \quad x \approx 2.29$

2A.054



Dibujamos la línea BD con D = 90° =>

$\cos 70° = \frac{|AD|}{15} \quad \Leftrightarrow \quad |AD| \approx 5.13 \quad =>$

$|AC| = 2 \cdot 5.13 = 10.26$

$sin\frac{B}{2} = \frac{|AD|}{15} = \frac{5.13}{15} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B}{2} = sin^{-1}\left(\frac{5.13}{15}\right) \quad \Leftrightarrow \quad$ B = 40°

Control: 70 + 70 + 40 = 180 Ok.

$\tan A = \frac{|BD|}{|AD} \quad =>$

$|BD| = \tan A \cdot |AD| \quad =>$

$|BD| = \tan 70° \cdot 5.13 \approx 14.09$

2A.055

Se aplican las reglas del coseno:

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{12^2+9^2-6^2}{2 \cdot 12 \cdot 9} \approx 0.875 \quad => \quad$ A = 29°

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{6^2+12^2-9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} \approx 0.6875 \quad => \quad$ A ≈ 46.6°

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{6^2+9^2-12^2}{2\cdot 6\cdot 9} \approx -0.25$ => B ≈ 104.4°

Control: 29 + 46.6 + 104.4 = 180 Ok.

2A.056

Regla del coseno $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cosB$

Aquí $b^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot cos\ 55°$ =>

$b \approx 6.57$

Regle del seno $\frac{b}{sinB} = \frac{a}{\sin A}$

Aquí $\frac{6.57}{sin55°} = \frac{5}{\sin A}$ ⇔ $\sin A \approx 0.623$ =>

$A \approx 38.6°$

$C \approx 180 - 55 - 38.6 = 86.4°$

2A.057

$\frac{sinC}{c} = \frac{sinB}{b}$ ⇔ $sinC = \frac{c}{b} sinB$ =>

$sinC = \frac{6}{7} sin80°$ ⇔

$C \approx 57.6°$

$A = 180 - 80 - 57.6 = 42.4°$

$\frac{b}{sinB} = \frac{a}{\sin A}$ => $\frac{7}{sin80°} = \frac{a}{\sin 42.4°}$ ⇔

$a \approx 4.8$

$Área = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sinC = \frac{1}{2} \cdot 4.8 \cdot 7 \cdot sin57.6 = 14.2$

2A.058

El área es proporcional a la longitud de dos lados. =>

d = 14 b = 16 c = 18

2A.059

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$ ⇔

$c^2 - 2bc \cdot cosA + b^2 - a^2 = 0$ =>

$c^2 - (2 \cdot 2.7 \cdot cos45°)c + (2.7^2 - 2.3^2) = 0$ ⇔

$c^2 - 3.8c + 2 = 0$ ⇔

$c = \frac{3.8 \pm \sqrt{3.8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$c = \frac{3.8 \pm 2.54}{2}$ ⇔

$c_1 = 0.63 \ o \ c_2 = 3.17$

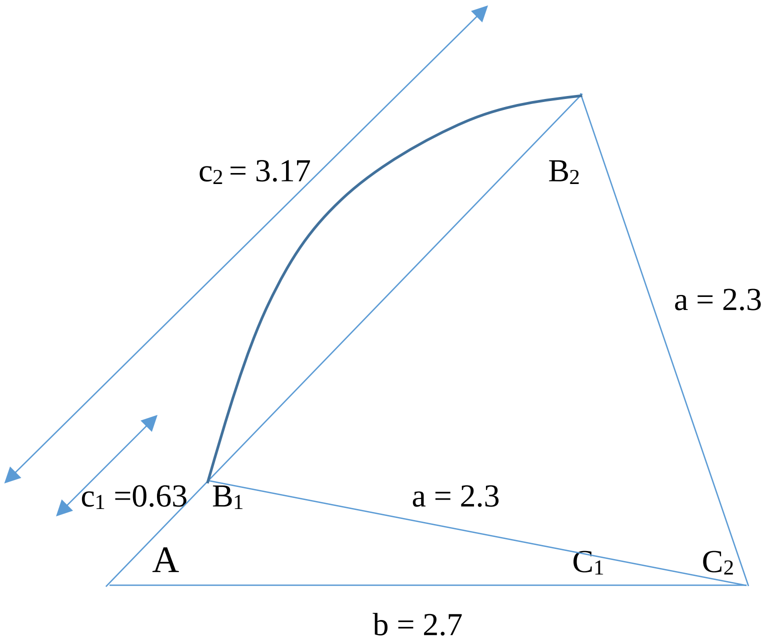
Un “triángulo complicado” con dos soluciones.

$\cos B_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2.3^2 + 0.63^2 - 2.7^2}{2 \cdot 2.3 \cdot 0.63} \approx -0.553$=> $B_1 \approx 123.6°$

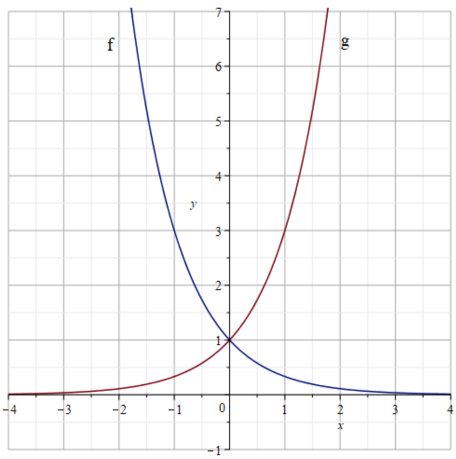
$$\cos B_2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2.3^2+3.17^2-2.7^2}{2\cdot 2.3\cdot 3.17} \approx 0.552 \quad => \quad B_2 \approx 56.5°$$

$$C_1 = 180 - 45 - 123.6 = 11.4°$$

$$C_2 = 180 - 45 - 56.5 = 78.5°$$



2A.060



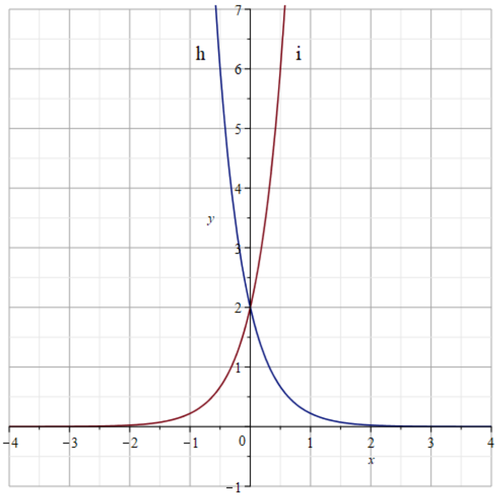
f es exponencialmente decreciente y se aproxima asintóticamente al eje x (en la dirección x positiva).

g aumenta exponencialmente en la dirección x positiva y se aproxima asintóticamente al eje x en la dirección x negativa.

Ambos pasan por el punto (0,1)

Son simétricos alrededor del eje y.

2A.061



h disminuye exponencialmente con una pendiente numéricamente mayor que f (en 2A.060) y se aproxima asintóticamente al eje x (en la dirección x positiva).

i aumenta exponencialmente con una pendiente numéricamente mayor que g en la dirección x positiva y se acerca asintóticamente al eje x en la dirección x negativa.

Ambos pasan por el punto (0,2)

Son simétricos alrededor del eje y.

2A.062

Fórmula $K_n = K_0(1+r)^n$

Aquí $K_n = 40\,000(1+0.06)^4 =$ 50 499 dollares

2A.063

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ dónde

$a = (1+r) = (1+10\%) = (1+0.1) = 1.1$ y

$f(0) = b \cdot a^{k \cdot 0} = b \cdot 1 = 1.5$ => b = 1.5 y

$f(1) = 1.5 \cdot 1.1^{k \cdot 1} = 1.65$ => k = 1 =>

$f(x) = 1.5 \cdot 1.1^x$

2A.064

$f(y) = b \cdot a^{ky}$ dónde

$a = (1+r) = (1-10\%) = (1-0.1) = 0.9$ y

$f(0) = b \cdot a^{k \cdot 0} = b \cdot 1 = 1.5$ => b = 1.5 y

$f(1) = 1.5 \cdot 0.9^{k \cdot 1} = 1.35$ => k = 1 =>

$f(y) = 1.5 \cdot 0.9^y$

Or:

$f(y) = b \cdot a^{ky}$ => $f(y) = b \cdot c^y$ dónde

$c = (1+r) = (1-10\%) = (1-0.1) = 0.9$ y

$f(0) = b \cdot c^0 = b \cdot 1 = 1.5$ => b = 1.5 y

$f(y) = 1.5 \cdot 0.9^y$

2A.065

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ => con puntos insertado:

$f(0) = 4 = b \cdot a^{k \cdot 0}$ ⇔ $b = 4$ porque $a^{k \cdot 0} = 1$

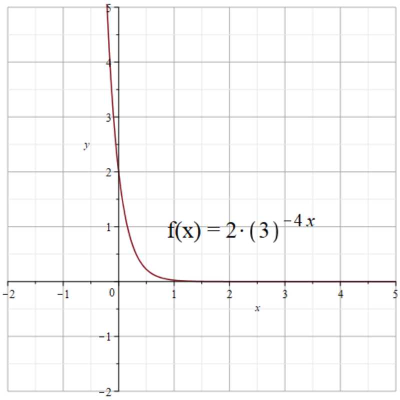
$f(1) = 9 = 4 \cdot a^{k \cdot 1}$ ⇔ $a^k = \frac{9}{4}$

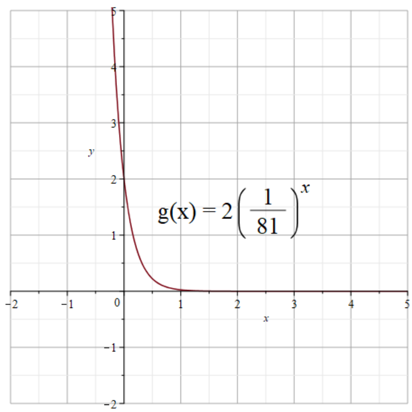
Entonces: $f(x) = 4\left(\frac{9}{4}\right)^x$ $b\ es\ 4 \quad a\ es\ \frac{9}{4}$ (k es 1)

O con $a^k = c$:

$f(x) = b \cdot c^x$ => $f(x) = 4\left(\frac{9}{4}\right)^x$ $b\ es\ 4 \quad a\ es\ \frac{9}{4}$

2A.066





Cumplimiento.

2A.067

$f(x) = 2 \cdot e^{0.4 \cdot x} = 2(e^{0.4})^x \approx 2 \cdot 1.49^x$

$g(x) = (-0.5) \cdot e^{(-0.27) \cdot x} = (-0.5) \cdot (e^{-0.27})^x \approx (-0.5) \cdot 0.76^x$

$h(x) = 3 \cdot e^{(-1.3) \cdot x} = 3(e^{-1.3})^x \approx 3 \cdot 0.27^x$

2A.068

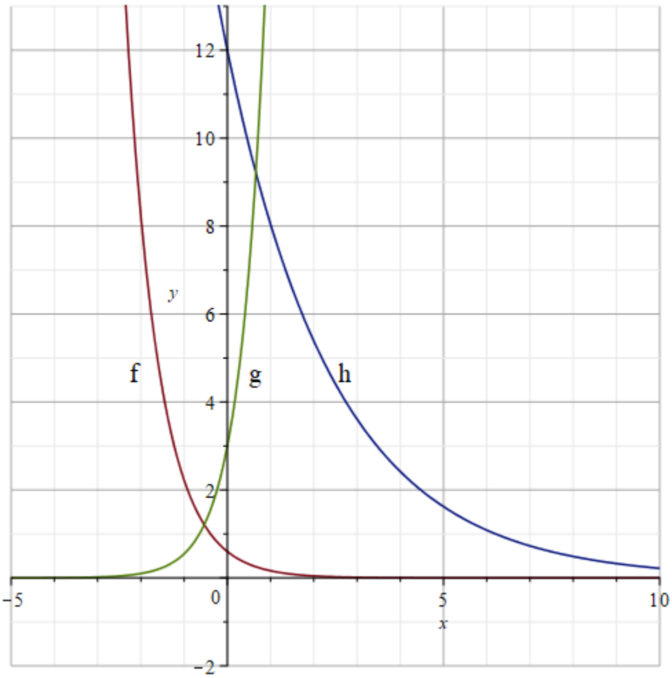
$f(x) = 0.6 \cdot e^{(-1.3) \cdot x} = 0.6 \cdot (e^{-1.3})^x \approx 0.6 \cdot 0.27^x$ decresiente

$g(x) = 3 \cdot e^{1.7 \cdot x} = 3(e^{1.7})^x \approx 3 \cdot 5.47^x$ cresiente

$h(x) = 12 \cdot e^{(-0.4) \cdot x} = 12 \cdot (e^{-0.4})^x \approx 12 \cdot 0.67^x$ decresiente

Un exponente negativo hace que la función sea decreciente, lo que se observa antes del acortamiento. Después del acortamiento se observa por el número base menor que uno.

f(x) disminuye más hasta que se acerca al eje x.



2A.069

Fórmula $y = b \cdot a^{k \cdot x}$ aquí $N = 150 \cdot e^{0.6 \cdot t}$

Para t = 0 $N_0 = 150 \cdot e^{0.6 \cdot 0} = 150$

Refiriéndose a la página 143 del libro de texto:

$$t_{doble} = \frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{N_{doble}}{N_0}\right) = \frac{1}{0.6} \cdot ln\left(\frac{300}{150}\right) \approx 1.16\ h$$

O usando $T_2 = \frac{ln\,2}{ln\,a^k}$ =>

aquí se inserta $e^{0.6}$ para a^k de la fórmula: $T_{doble} = \frac{ln\,2}{ln\,e^{0.6}} \approx 1.16\ h$

$10\,000 = 150 \cdot e^{0.6 \cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{0.6 \cdot t} = \frac{10\,000}{150} \approx 66.7 \quad \Leftrightarrow$

$0.6 \cdot t = ln\, 66.7 \quad \Leftrightarrow \quad t = 7\ horas$

2A.070

El signo ≈ significa que se utilizó CAS.

$log\, 4 + log 5 = log(4 \cdot 5) = log 20 \approx 1.3$

$log\left(\frac{3}{4}\right) + log\left(\frac{4}{5}\right) = log\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = log\left(\frac{3}{5}\right) \approx -0.22$

$log\, 4 - log 5 = log\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0.097$

$log\left(\frac{3}{4}\right) - log\left(\frac{4}{5}\right) = log\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}\right) = log\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) = log\left(\frac{15}{16}\right) \approx$
-0.028

2A.071

$ln\, 4 + ln 5 = ln(4 \cdot 5) = ln 20 \approx 3$

$ln\left(\frac{3}{4}\right) + ln\left(\frac{4}{5}\right) = ln\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = ln\left(\frac{3}{5}\right) \approx -0.51$

$ln\, 4 - ln 5 = ln\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0.22$

$ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{4}{5}\right) = ln\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}\right) = ln\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) = ln\left(\frac{15}{16}\right) \approx -0.064$

2A.072

$ln(e \cdot e^3) = ln\, e^4 = 4\, ln\, e = 4$

$log(e \cdot e^3) = log\, e^4 = 4\, log\, e \approx 4 \cdot 0.434 \approx 1.74$

$4\, ln\, e^{4-1} = 4\, ln\, e^3 = 4 \cdot 3ln\, e = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$

$4\, ln\, e^4 + 4\, ln\, e^3 = 4 \cdot 4ln\, e + 3 \cdot 4 \ln e = 16 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 28$

2A.073

$3^{2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad ln\, 3^{2x} = ln\, 4 \quad \Leftrightarrow$

$2x \cdot ln\, 3 = ln\, 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{ln4}{ln3} \quad \Leftrightarrow$

$2x \approx 1.26 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0.63$

Or:

$3^{2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad log\, 3^{2x} = log\, 4 \quad \Leftrightarrow$

$2x \cdot log\, 3 = log\, 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{log4}{log3} \quad \Leftrightarrow$

$2x \approx 1.26 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0.63$

$3^{-2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad ln\, 3^{-2x} = ln\, 4 \quad \Leftrightarrow$

$(-2x) \cdot ln\, 3 = ln\, 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = \frac{ln4}{ln3} \quad \Leftrightarrow$

$-2x \approx 1.26 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx -0.63$

$ln\, 3x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{ln3x} = e^4 \quad \Leftrightarrow$

$3x = e^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{e^4}{3} \approx 18.2$

$ln\, 3x + 2 = ln\, 4 \quad \Leftrightarrow \quad ln\, 3x = ln\, 4 - 2 \quad \Leftrightarrow$

$e^{ln3x} = e^{ln4-2}$ ⇔ $3x = e^{ln4} \cdot e^{-2}$ ⇔

$3x = 4 \cdot e^{-2}$ ⇔ $x = \frac{4}{3 \cdot e^2} \approx 0.18$

2A.074

$\log(2-2x) = ln\ e^2$ ⇔ $\log(2-2x) = 2$ ⇔

$2 - 2x = 10^2$ ⇔ $x = \frac{100-2}{-2} = -49$

Control por inserción en la ecuación original => se define la raíz.

$\log(2x+6) = -0.3$ ⇔ $2x + 6 = 10^{-0.3}$ ⇔

$2x = 10^{-0.3} - 6$ ⇔ $x \approx -2.75$

Control: se define la raíz.

$\ln x + \ln(x-1) = 2ln\ 2$ ⇔

$\ln\big(x(x-1)\big) = ln\ 2^2$ ⇔

$e^{\ln(x(x-1))} = e^{ln4}$ ⇔

$x^2 - x = 4$ ⇔

$x^2 - x - 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x \approx 2.56$ (La otra raíz: x = - 1.56 *no* está definida)

2A.075

$ln\,x - ln(x-1) = ln\,2$ ⇔

$ln\frac{x}{x-1} = ln\,2$ ⇔

$\frac{x}{x-1} = 2$ ⇔

$x = 2x - 2$ ⇔

$x = 2$ Control: se define la raíz.

$ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + l\,n(x+4) + 2 = 2$ ⇔

$ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot(x+4)\right) = 0$ ⇔

$\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot(x+4)\right) = e^0 = 1$ ⇔

$x+4+1+\frac{4}{x} = 1$ ⇔

$x^2 + 4x + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$ ⇔

$x = -2$ Control: se define la raíz.

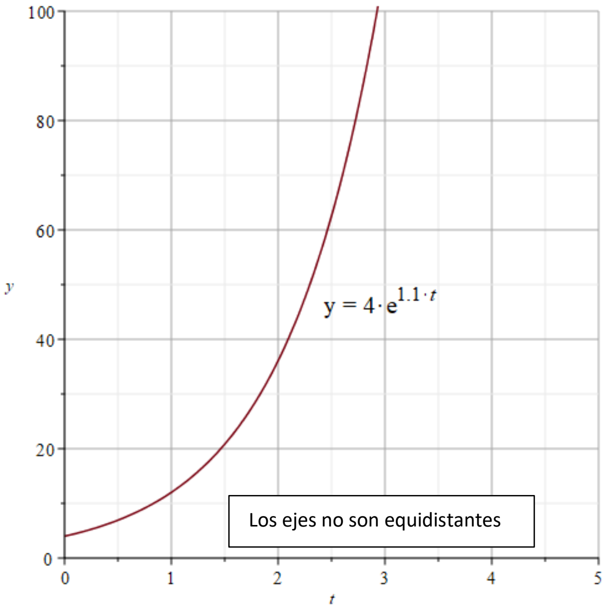
2A.076

$y = 4\cdot e^{1.1\cdot t}$ ⇔ $e^{1.1\cdot t} = \frac{y}{4}$ ⇔

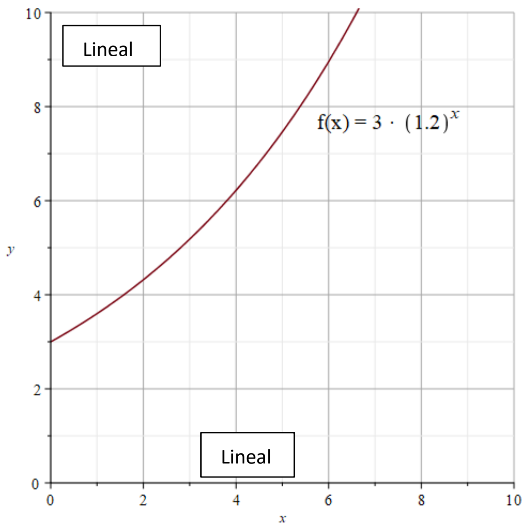
$ln\,e^{1.1\cdot t} = ln\frac{y}{4}$ ⇔ $1.1t = ln\,\frac{y}{4}$ ⇔

$t = \frac{1}{1.1}\cdot ln\,\frac{y}{4}$

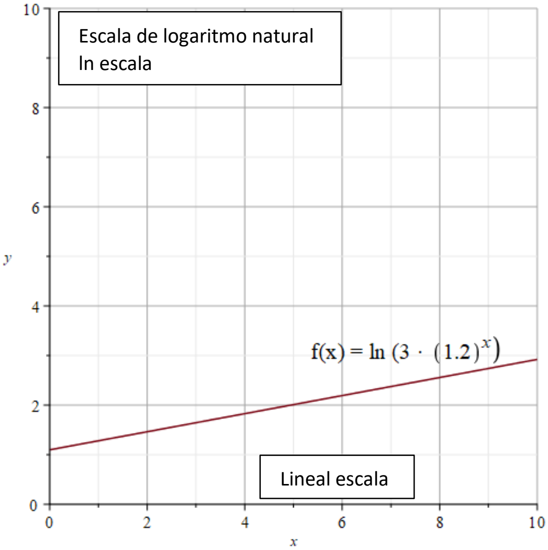
$$T_2 = \frac{ln\ 2}{ln\ a^k} \quad aquí: \quad T_2 = \frac{ln\ 2}{ln\ e^{1.1}} \approx 0.63$$



2A.077

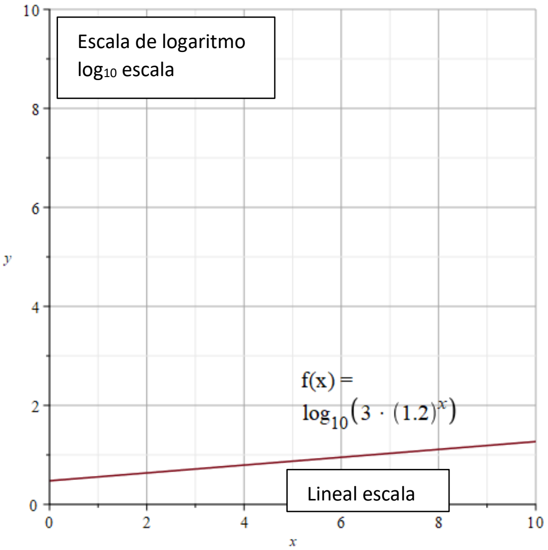


Leyendo por ejemplo: $x = 0 \Rightarrow f(x) \approx 3$ y $x = 6 \Rightarrow f(x) \approx 9$



Leyendo por ejemplo: $x = 0 \Rightarrow \ln f(x) \approx 1.1 \Rightarrow f(x) \approx e^{1.1} \approx 3$

y $x = 6 \Rightarrow \ln f(x) \approx 2.2 \Rightarrow f(x) \approx e^{2.2} \approx 9$



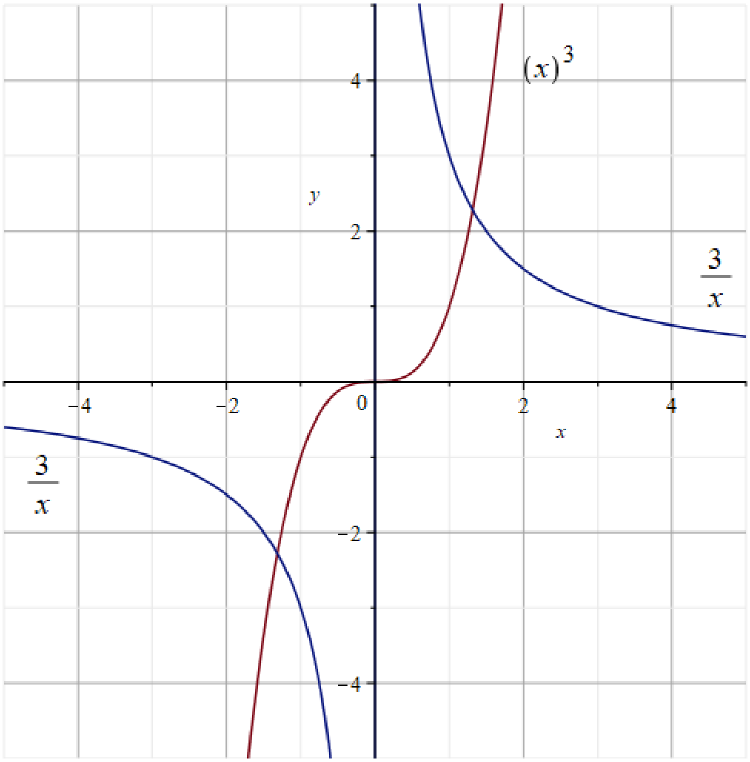
Leyendo por ejemplo: $x = 0 \Rightarrow \log f(x) \approx 0.5 \Rightarrow f(x) \approx 10^{0.5} \approx 3$

y $x = 6 \Rightarrow \log f(x) \approx 0.95 \Rightarrow f(x) \approx 10^{0.95} \approx 9$

La comparación de las dos lecturas del primer diagrama con las dos lecturas de los otros diagramas muestra el cumplimiento.

Además, se observa que una curva exponencial en el primer cuadrante de un diagrama lineal normal se convierte en una línea recta en un diagrama donde el segundo eje (f(x)) tiene una escala logarítmica.

2A.078



Al leer los puntos de intersección son, aprox.:

(-1.3 ; -2.3) y (1.3 ; 2.3)

Y por cálculo:

$y = \frac{3}{x}$ y $y = x^3$ =>

$\frac{3}{x} = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3^{½} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm(3^{½})^{½}$ =>

$x_1 \approx 1.316 \quad y \quad x_2 \approx -1.316$ =>

$y_1 \approx 2.28 \quad e \quad y_2 \approx -2.28$ =>

Por cálculo los puntos de intersección son:

(1.316 ; 2.28) y (-1.316 ; -2.28) Cumplimiento.

Parte 2.
Sección B – soluciones propuestas

2B.01

80% de 20 000 es 16 000 m^3

Máx. Suminiatrado por día: $4\,\frac{m^3}{h}\cdot 24\,horas = 96\,m^3$

Evaporatdo por día: $20\,m^3$

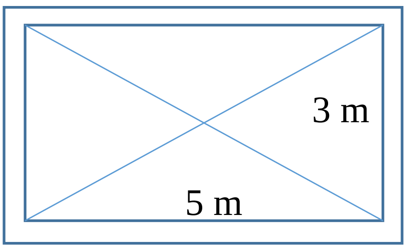
Lo que corresponde a $\frac{16\,000\,m^3}{(96+20)\,\frac{m^3}{day}} \approx 138\,días$ de suministro de agua.

Después de tres meses normalmente secos, el volumen de agua es

$$V = (V_{depósito} + V_{recibido}) - (V_{suministrado} + V_{evaporado}) \quad =>$$

$$V = (20\,000\,m^3 + 1000\,m^3)$$
$$-\left(4\,\frac{m^3}{h}\cdot 24\,\frac{h}{día}\cdot 90\,días + 20\,\frac{m^3}{day}\cdot 90\,días\right) = 10\,560\,m^3$$

2B.02



Usaría una cinta métrica para verificar el largo y el ancho midiendo directamente.

Y comprobaría los ángulos rectos indirectamente midiendo las dos diagonales. Deben ser iguales y medir:

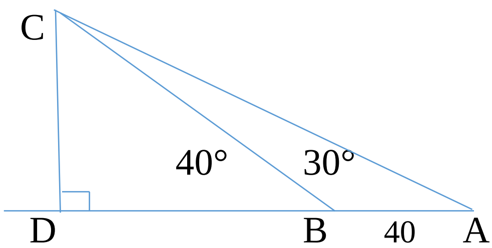
$$\text{diagonal} = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5.831\, metros$$

2B.03

$$tan\, 40° = \frac{altura}{29} \qquad \Leftrightarrow$$

$$altura = 29 \cdot tan\, 40° = 24.3\, metros$$

2B.04



Llamamos al punto superior C – y al punto base D (|CD| = altura), y formamos las tres ecuaciones:

$$tan\, 40° = \frac{|CD|}{|BD|} \qquad tan\, 30° = \frac{|CD|}{|AD|} \qquad |AD| = |BD| + 40 \qquad =>$$

$$tan\, 40° = \frac{|CD|}{|BD|} \qquad tan\, 30° = \frac{|CD|}{|BD|+40} \qquad \Leftrightarrow$$

$$|BD| \cdot tan\, 40° = (|BD| + 40) \cdot tan\, 30° \qquad \Leftrightarrow$$

$$|BD| \approx 0.688 \cdot (|BD| + 40) \qquad \Leftrightarrow$$

$|BD| \approx 0.688 \cdot |BD| + 27.5$ ⇔

$|BD| \approx 88.2\ metros$

E insertado en la primera ecuación:

$tan\ 40° = \frac{|CD|}{|BD|}$ => $|CD| \approx tan\ 40° \cdot 88.2$

Entonces: |CD| = altura ≈ 74 metros

2B.05

Tenemos nuestro nivel de medición a cinco metros sobre el nivel del mar, y consideramos triángulos a ese nivel.

Llamamos C al punto superior del molino de viento, y el punto cinco metros por encima del punto base se llama D. La altura del molino de viento entonces se convierte en |CD| + 5

Formamos tres ecuaciones:

$tan\ 28° = \frac{|CD|}{|BD|}$ $tan\ 20° = \frac{|CD|}{|AD|}$ $|AD| = |BD| + 100$ =>

$tan\ 28° = \frac{|CD|}{|BD|}$ $tan\ 20° = \frac{|CD|}{|BD|+100}$ ⇔

$|BD| \cdot tan\ 28° = (|BD| + 100) \cdot tan\ 20°$ ⇔

$|BD| \approx 0.685 \cdot (|BD| + 100)$ ⇔

$|BD| \approx 0.685 \cdot |BD| + 68.5$ ⇔

$|BD| \approx 217\ metros$

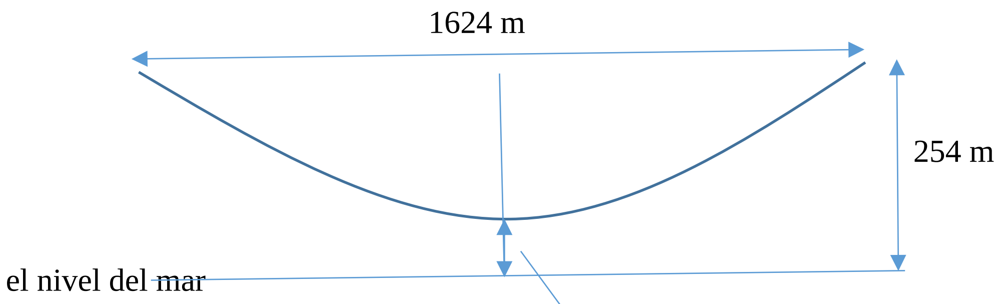
E insertado en la primera ecuación:

$tan\ 28° = \frac{|CD|}{|BD|}$ => $|CD| \approx tan\ 28° \cdot 217$

Entonces: altura sobre el dispositivo de medición ≈ 115 metros =>

y: |CD| = altura sobre el nivel del mar ≈ 115 + 5 ≈ 120 metros

2B.06



bosquejo del principio

Parábola $y = ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$

donde c = 0

y por la mitad $(254 - 77) = a \cdot 812^2 + b \cdot 812$

y por la otra mitad $(254 - 77) = a \cdot (-812)^2 + b \cdot (-812)$

lo que lleva a:

$$a \cdot 812^2 + b \cdot 812 = a \cdot (-812)^2 + b \cdot (-812)$$

lo cual sólo puede ser cierto para b = 0 =>

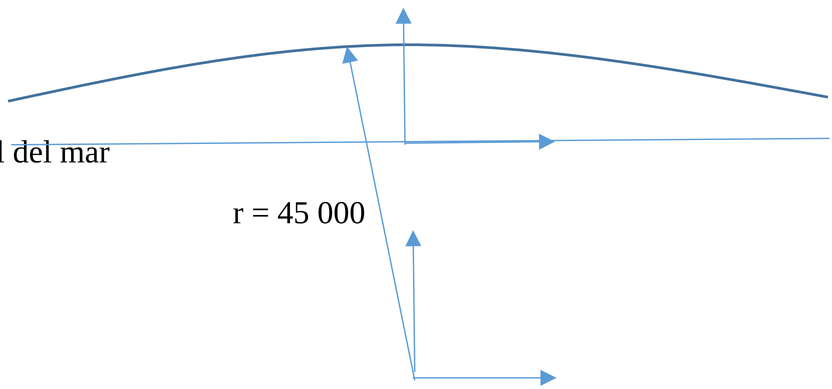
$y = ax^2 \quad => \quad (254 - 77) = a \cdot 812^2 \quad ⬄ \quad a = 0.000268 \quad =>$

$y = 0.000268 \cdot x^2$

Parábola elevada 77 metros => c = 77 =>

$y = 0.000268 \cdot x^2 + 77$

2B.07



bosquejo del principio.

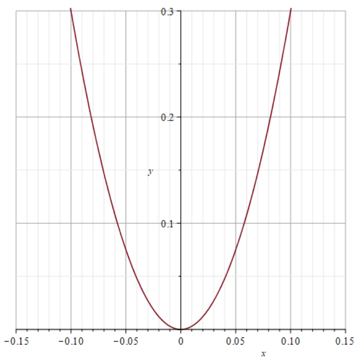
Círcolo: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ =>

(0,0) en el centro del círculo: $(x-0)^2+(y-0)^2=45\,000^2$

(0,0) del nivel del mar: $(x-a)^2+(y-(-44\,925))^2=45\,000^2$

O más corto: $(x-a)^2+(y+44\,925)^2=45\,000^2$

2B.08



Parábola $y=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$ dónde $\mathrm{c}=0$

(-0.1 ; 0.3) ensertada: $0.3=a(-0.1)^2+\mathrm{b}(-0.1)$ ec.1

(0.1 ; 0.3) ensertada: $0.3=a(0.1)^2+\mathrm{b}(0.1)$ ec.2

Dos ecuaciones con dos incógnitas:

ec.1 $\quad b = \frac{0.3-0.01a}{-0.1} = -3 + 0.1a \quad =>$

ec.2 $\quad 0.3 = a(0.1)^2 + (-3 + 0.1a)(0.1) \quad \Leftrightarrow$

$0.3 = 0.01a - 0.3 + 0.01a \quad \Leftrightarrow$

$0.6 = 0.02a \quad \Leftrightarrow$

$a = 30 \quad =>$

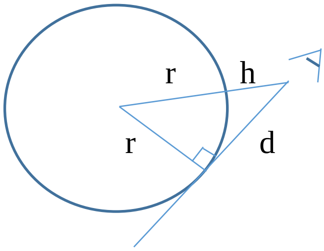
ec.1 $\quad b = -3 + 0.1 \cdot 30 = 0$

Entonces: $y = 30x^2 \quad y \quad -0.1 \leq x \leq 0.1$

2B.09

Hallamos el radio de la Tierra a partir de:

$O = 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{O}{2\pi} = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6378\ km \approx 6\,378\,000\ m$



Pitágoras:

$d^2 + r^2 = (r + h)^2 \quad \Leftrightarrow$

$d^2 = (r + h)^2 - r^2$

h = 2 m:

$d^2 = 6\,378\,002^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 5051\ m \approx 5\ km$

h = 40 m:

$d^2 = 6\,378\,040^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 22\,589\ m \approx 23\ km$

h = 100 m:

$$d^2 = 6\,378\,100^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 35\,716\;m \approx 36\;km$$

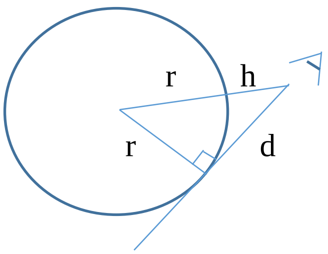
h = 1000 m:

$$d^2 = 6\,379\,000^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 112\,947\;m \approx 113\;km$$

2B.10

Hallamos el radio de la Tierra a partir de:

$$O = 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{O}{2\pi} = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6378\;km \approx 6\,378\,000\;m$$



Pitágoras:

$$d^2 + r^2 = (r+h)^2 \quad \Leftrightarrow$$

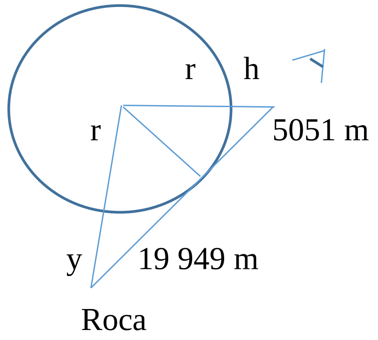
$$d^2 = (r+h)^2 - r^2$$

h = 2 m:

$$d^2 = 6\,378\,002^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 5051\;m \approx 5\;km$$

Y cuanto más lejos esté la roca = 25 000 – 5051 = 19 949 m

Luego encontraremos la distancia desde nuestra línea de visión al mar junto a la roca:



y es la altura oculta de la roca.

$r^2 + 19\,949^2 = (r+y)^2$ =>

$6\,378\,000^2 + 19\,949^2 = (r+y)^2$ ⇔

$r + y \approx 6\,378\,031$

y r ensertada:

$y \approx 6\,378\,031 - 6\,378\,000 \approx 31\ metros$

(Suficiente para esconder un pueblo junto al mar).

2B.11

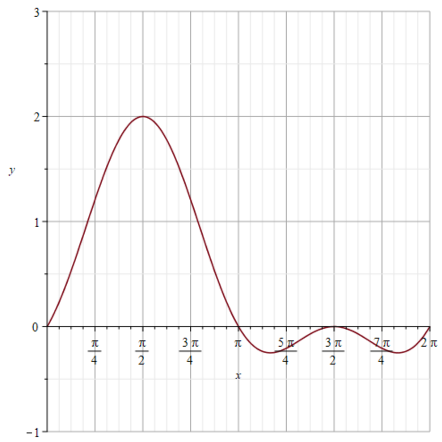
$(\sin x)^2 + \sin x = 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ ⇔

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 0 \quad y \ -1$

En un período $(0 \leq x \leq 2\pi)$ $\sin x = 0$ ocurre para los ángulos $x = 0 \quad y \quad \pi \quad y \quad 2\pi$ (que se puede ver en un círculo unitario).

En un período $\sin x = -1$ ocurre para $x = \frac{3\pi}{2}$

Combinado $x = 0,\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ cumple con el diagrama:



2B.12

$(\sin x)^2 + \sin x = 0$ para $0 \leq x \leq 6\pi \quad \Leftrightarrow$

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 0 \;\; y \; -1$

En un período $(0 \leq x \leq 2\pi)$ $\sin x = 0$ ocurre para los ángulos $x = 0 \;\; y \;\; \pi \;\; y \;\; 2\pi$

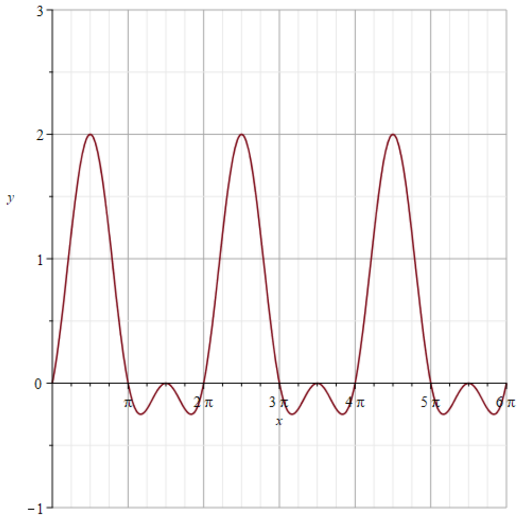
En un período $\sin x = -1$ ocurre para $x = \frac{3\pi}{2}$ (que se puede ver en un círculo unitario).

Combinado $x = 0, \; \pi, \; \frac{3\pi}{2}, \; 2\pi$

En tres (o más) períodos tenemos que expandir usando un número entero p (un número entero):

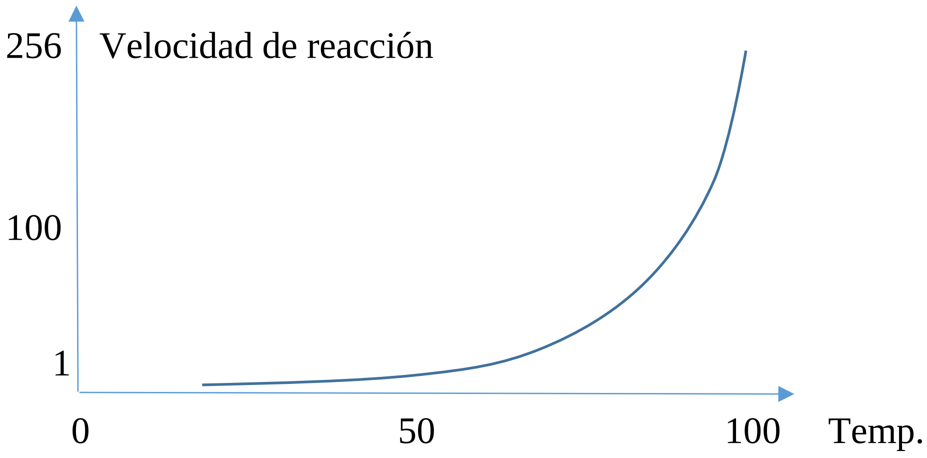
$x = p\pi \;\; y \;\; -\frac{\pi}{2} + 2p\pi$ cual es la respuesta completa.

Cumplimiento para lectura y cálculo.



2B.13

Temp.	20	30	40	50	60	70	80	90	100	°C
Tasa	1	2	4	8	16	32	64	128	256	Factor



Curva aproximada en principio.

Es una función exponencial.

2B.14

Temp.	20	30	40	50	60	70	80	90	100	°C
Tasa	1	2	4	8	16	32	64	128	256	Factor

Fórmula $y = b \cdot c^x$ aqui y = tasa e x = temp.

$1 = b \cdot c^{20}$ => $b = \frac{1}{c^{20}}$

$2 = b \cdot c^{30}$ => $b = \frac{2}{c^{30}}$ =>

$\frac{1}{c^{20}} = \frac{2}{c^{30}}$ ⇔ $c^{30} = 2 \cdot c^{20}$

Resuelta por CAS o adivinando: $c \approx 1.07\ y\ (-1.07)$ =>

$c \approx 1.07$ => $b = 0.25$

Entonces: $y \approx 0.25 \cdot 1.07^x$

Control: Insertando (100 , 256) =>

$256 \approx 0.25 \cdot 1.07^{100}$ ⇔

$256 \approx 256$ verdad

2B.15

Fórmula $y = b \cdot a^{k \cdot x}$ Aqui $N = 160 \cdot e^{0.5 \cdot t}$

Para t = 0 $N_0 = 160 \cdot e^{0.5 \cdot 0} = 160$

Refiriéndose a la página 143 del libro de texto:

$$t_{doble} = \frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{N_{doble}}{N_0}\right) = \frac{1}{0.5} \cdot ln\left(\frac{320}{160}\right) \approx 1.39\ h$$

O usando $T_2 = \frac{ln\, 2}{ln\, a^k}$ =>

aquí se inserta $e^{0.5}$ para a^k de la fórmula: $T_{doble} = \frac{ln\,2}{ln\,e^{0.5}} \approx 1.39\ h$

$10\,000 = 160 \cdot e^{0.5 \cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{0.5 \cdot t} = \frac{10\,000}{160} \approx 62.5 \quad \Leftrightarrow$

$0.5 \cdot t = ln\,62.5 \quad \Leftrightarrow \quad t = 8.72\ horas$

2B.16

P_0 es la producción al 1 de enero de 2015.

P es la producción real

r es el crecimiento por año, aquí 0,04

n es el número de años, aquí 7. Entonces:

$P = P_0(1+r)^n \quad => \quad P = P_0(1+0.04)^7 \quad \Leftrightarrow$

$P = P_0 \cdot 1.316$ el crecimiento es: fin – inicio = 1.316 – 1 = 0.316

Por lo tanto, el crecimiento es 0,316 = 31,6% durante los siete años.

2B.17

$K_n = K_0(1+r)^n$ dónde encontraremos el valor inicial K_0

Aquí: $K_n = 20\,000$ r = 0.06 n = 5 =>

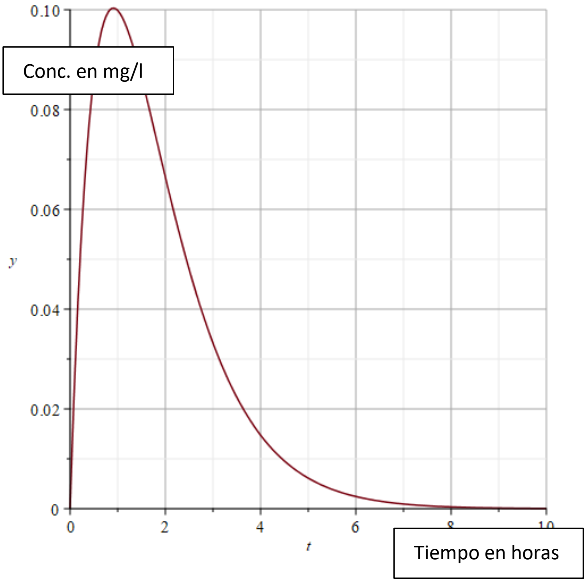
$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} = \frac{20\,000}{(1+0.06)^5} = 14\,945\ libras$

Alternativamente podemos calcular “hacia atrás” (desde el momento del pago) teniendo un exponente negativo y con $K_0 = 20\,000$ $r = 0.06$ $n = -5$:

$K_n = 20\,000(1 + 0.06)^{-5} = 14\,945\ libras$

2B.18

$conc. = f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$



La concentración máxima se lee como aprox. 0,1 $\frac{mg}{L}$ después de aprox. 0,9 horas.

2B.19

Fórmula $y = b \cdot c^x$ aquí $N = b \cdot c^t$

donde N = número de bacterias

b = 100 000

c = número base de crecimiento

t = tiempo en minutos

Encontrar c $\quad 300\,000 = 100\,000 \cdot c^{45} \quad \Leftrightarrow \quad c = 1.0247$

Después de tres horas $\quad N_{3h} = 100\,000 \cdot 1.0247^{180} \approx 8.08\ mió.$

2B.20

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-7} \quad => \quad pH = -log\ 10^{-7} = 7$

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-10} \quad => \quad pH = -log\ 10^{-10} = 10$

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-3} \quad => \quad pH = -log\ 10^{-3} = 3$

$[H^+] = 3 \cdot 10^{-5} \quad => \quad pH = -log\ (3 \cdot 10^{-5}) = 4.5$

2B.21

El agua de lluvia natural es ligeramente ácida.

$5.5 = -log\ [H^+] \quad \Leftrightarrow \quad -5.5 = log\ [H^+] \quad \Leftrightarrow$

$10^{-5.5} = 10^{\log[H^+)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10^{5.5}} = [H^+] \quad \Leftrightarrow$

$[H^+] = 0.000\,003\,2\,\frac{mol}{L} = 0.0032\,\frac{mmol}{L}$

2B.22

$7.8 = -log\ [H^+] \quad \Leftrightarrow \quad -7.8 = log\ [H^+] \quad \Leftrightarrow$

$10^{-7.8} = 10^{\log[H^+)} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-7.8} = [H^+] \quad \Leftrightarrow$

$[H^+] = 0.000\,000\,015\,8\,\frac{mol}{L} = 0.0158 \cdot 10^{-6}\,\frac{mol}{L}$

Parte 3.

Sección A – soluciones propuestas

3A.001

$f(x) = -x^2 + 4x - 2$ => $\frac{d}{dx}f(x) = -2x + 4$

$g(x) = 8x^2 + x$ => $\frac{d}{dx}g(x) = 16x + 1$

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8$ => $\frac{d}{dx}h(x) = x$

$i(x) = 8x^2 - 1$ => $\frac{d}{dx}i(x) = 16x$

3A.002

$f(x) = 4x^2 + 2$ $\quad y \quad$ $f(1) = 6$ =>

$f'(x) = 8x$ $\quad y \quad$ $f'(1) = 8$

$f(x) = -6x^2 - x$ $\quad y \quad$ $f(1) = -7$ =>

$f'(x) = -12x - 1$ $\quad y \quad$ $f'(1) = -13$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ $\quad y \quad$ $f(1) = -\frac{5}{2}$ =>

$f'(x) = x$ $\quad y \quad$ $f'(1) = 1$

$f(x) = -3x^2 - 1$ $\quad y \quad$ $f(1) = -4$ =>

$f'(x) = -6x \quad y \quad f'(1) = -6$

3A.003

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ => $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$

que es la pendiente a de todas las tangentes de la función (una parábola por cierto).

y en punto (2,-1) $a = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot (2) = -1$

Todas las tangentes son rectas con la prescripción.

$y = ax + b$

b se encuentra insertando nuestro punto (x,y) = (2,-1) =>

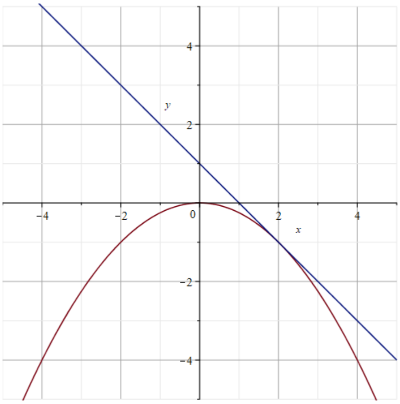
$-1 = (-1) \cdot 2 + b$ ⇔

$b = 1$

a y b insertados: $y = (-1)x + 1$ ⇔

$y = -x + 1$

Control mediante un boceto en un diagrama:



Cumplimiento.

3A.004

$f(x) = 3x^2$ => $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x$

Para $f'(x) = a = 2$ => $6x = 2$ ⇔ $x = \frac{1}{3}$

Para $x = \frac{1}{3}$ => $f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} = y$

Ecuación tangente $y = ax + b$ =>

$\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} + b$ ⇔

$b = -\frac{1}{3}$ =>

Entonces $y = 2x - \frac{1}{3}$

3A.005

$f(x) = x^{½}$ => $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2}x^{-½}$

Para $x = 9$ => $f(x) = 3$ y $f'(x) = \frac{1}{6} = a$

Ecuación tangente $y = ax + b$ =>

$3 = \frac{1}{6} \cdot 9 + b$ ⇔

$b = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ =>

Entonces $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

3A.006

$f(x) = 4x^2 + x^{½}$ => $f´(x) = 8x + \frac{1}{2}x^{-½}$

$f(x) = x^{½} + 4x - 9$ => $f´(x) = \frac{1}{2}x^{-½} + 4$

$f(x) = x^{½}(x^{½} - 6) = x - 6x^{½}$ => $f´(x) = 1 - 3x^{-½}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ => $f´(x) = -x + 4$

3A.007

Prescripción/fórmula $y = Ax^2 + Bx + C$

(0,0) insertada $0 = 0 + 0 + C$ ⇔ C = 0

(4,4) insertada $4 = A \cdot 4^2 + B \cdot 4$ *ec.1*

$y = Ax^2 + Bx$ => $y´ = 2Ax + B$ pendiente

x = 4 and slope = 3 inserted $3 = 2A \cdot 4 + B$ *ec.2*

ec.1 $B = 1 - 4A$ =>

ec.2 $8A + 1 - 4A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}$ =>

ec.1 $B = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1$

Entonces $y = \frac{1}{2}x^2 - x$

3A.008

$y = x^3 - 12x + 1$ => $\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 - 12$ pendiente

Para una tangente horizontal la pendiente es cero =>

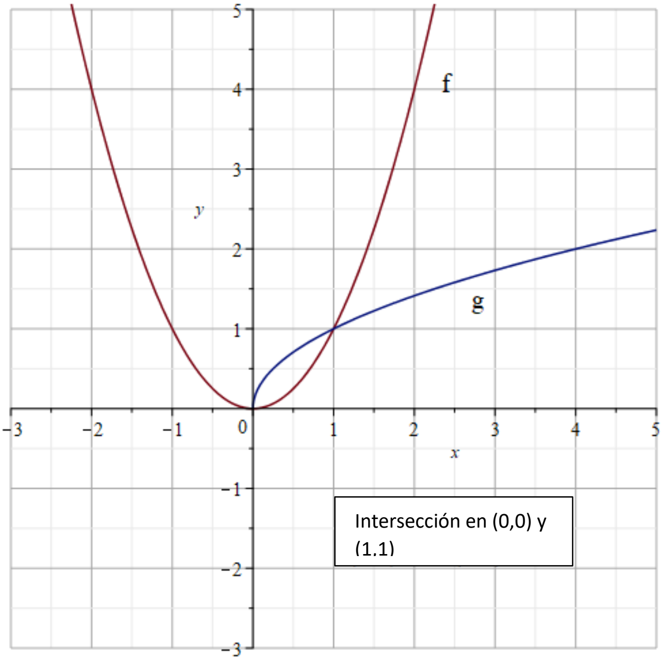
$3x^2 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$

Para x = 2 $y = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = -15$

Para x = -2 $y = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 1 = 17$

Por tanto, existen tangentes horizontales en puntos
(2,-15) y (-2,17)

3A.009



Intersección para $f(x) = g(x)$ =>

$x^2 = x^{½}$ ⇔

$x^2 - x^{½} = 0$ ⇔

$x^4 - x^{\frac{5}{2}} = 0$ multiplicado por x^2

$x\left(x^3 - x^{\frac{3}{2}}\right) = 0$

Esto sólo puede ser cierto para $x_1 = 0$ y para (entre paréntesis) $x_2 = 1$

$x_1 = 0$ insertada en f: $f(x) = x^2$ => $f(0) = 0 = y_1$

$x_2 = 1$ insertada en g: $g(x) = x^{½}$ => $g(1) = 1 = y_2$

Entonces, las curvas se cruzan en los puntos (0,0) y (1,1)

Cumplimiento de lectura.

3A.010

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

f(x) = y = 0 en el eje x: $x^2 - 4x + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$ =>

Intersección con el eje x en el punto (2,0)

x = 0 en el eje y: $f(x) = 0 - 0 + 4 = 4$ =>

Intersección con el eje x en el punto (0,4)

Pediente en (2,0) $f'(x) = 2x - 4$ =>

$f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

Ecuación tangente $y = ax + b$ =>

(2,0) y a insertado $0 = 0 \cdot 2 + b$ ⇔

$b = 0$ =>

Tangente en (2,0) $y = 0$ igual al eje x

Pendiente en (0,4) $f'(x) = 2x - 4$ =>

$f'(0) = -4$

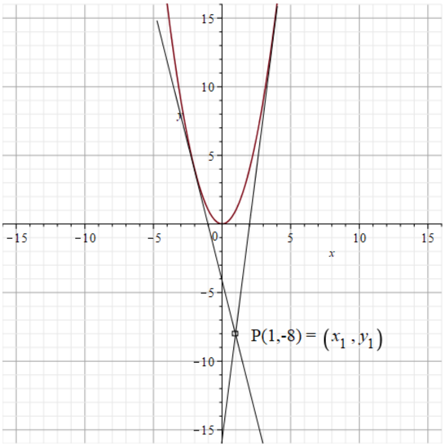
Ecuación tangente $y = ax + b$ =>

(0,4) y a insertado $4 = -4 \cdot 0 + b$ ⇔

$$b = 4 \qquad\qquad =>$$

Tangente en (0,4) $\quad y = -4x + 4$

3A.011



(Figura no necesaria).

Curva (parábola) $\quad y = x^2 \quad => \quad f'(x) = 2x = a$

Ecuación tangente $\quad y = a(x - x_1) + y_1$

La parábola y las dos tangentes tienen dos puntos en común. Estos puntos tienen las coordenadas x encontradas por inserción en la ecuación tangente: $\quad x^2 = 2x(x-1) + (-8) \quad \Leftrightarrow$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)\cdot 8}}{2\cdot(-1)} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \quad y \quad x = 4$$

tangente 1 $\quad y = a(x - x_1) + y_1$

donde $\quad a = \frac{16-(-8)}{-4-1} = 8$

entonces $y = 8(x-1)+(-8)$ $\Leftrightarrow$

$y = 8x - 16$

tangente 2 $y = a(x-x_1)+y_1$

donde $a = \frac{4-(-8)}{-2-1} = -4$

entonces $y = -4(x-1)+(-8)$ $\Leftrightarrow$

$y = -4x - 4$

3A.012

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $x \neq -1$ (dominio) =>

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ pendiente tangente

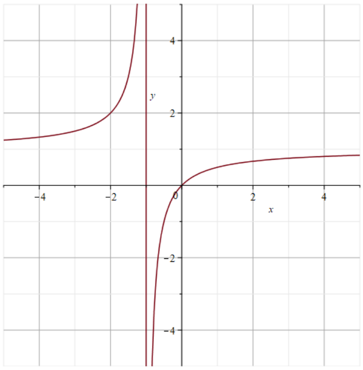
Pendiente tangente horizontal = 0 =>

$\frac{1}{(x+1)^2} = 0$ $\Leftrightarrow$

$1 = 0$ *que es falso para todo x. Entonces, no hay raíces* =>

Sin tangentes horizontales.

Control por croquis:



Cumplimiento.

3A.013

$y = 3x^2 - 4$ => $\frac{dy}{dx} = y' = 6x$

Pendiente tangente horizontal para $y' = 6x = 0$ ⇔

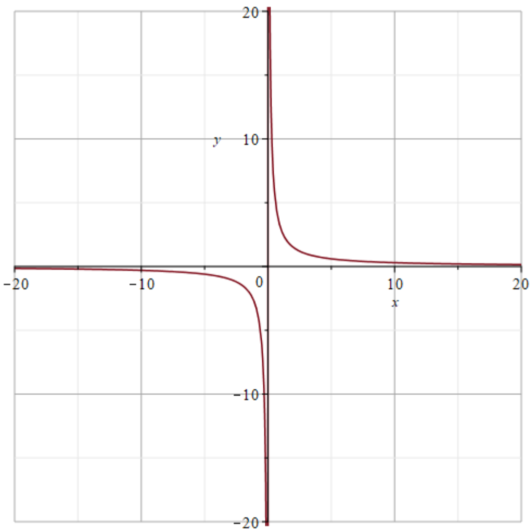
$x = 0$ => $y = -4$ =>

Tangente horizontal en el punto (0,-4)

El factor A en la prescripción $y = Ax^2 + Bx + C$ aquí es +3, por lo que las ramas miran hacia arriba y, por lo tanto, (0,-4) es un mínimo.

3A.014

$x \cdot y = k \quad e \quad x \neq 0 \quad e \quad y \neq 0$ Curva de hipérbola compartida.



La curva no puede cruzar el eje x ya que y = 0 no está definido.
La curva no puede cruzar el eje y ya que x = 0 no está definido.
Entonces, los dos ejes son asíntotas y no tangentes.
Esta también parece ser la observación correcta.

3A.015

¿Tangente(s) horizontal(es)?

$x \cdot y = k \quad e \quad x \neq 0 \quad e \quad y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2}$

Tangente horizontal para $y' = -k \cdot x^{-2} = 0$ ⇔

$\frac{1}{x^2} = 0$ ⇔

$1 = 0 \quad cual\ es\ falso$ =>

Sin tangentes horizontales.

3A.016

¿Asíntotas horizontales?

$x \cdot y = k \quad e \quad x \neq 0 \quad e \quad y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2} = -k \cdot \frac{1}{x^2}$

Hay una asíntota horizontal si la pendiente va hacia cero:

$y' \to 0$ => $-k \cdot \frac{1}{x^2} \to 0$

lo que sucede por $x \to \pm\infty$ => $y \to 0$

como se puede ver en la función original $y = k \cdot \frac{1}{x}$

Por lo tanto la recta y = 0 es una asíntota horizontal.

$y = 0$ es el eje x.

3A.017

¿Tangente(s) vertical(es)?

$x \cdot y = k \quad e \quad x \neq 0 \quad e \quad y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2} = -k \cdot \frac{1}{x^2}$

Hay una tangente vertical si la pendiente se vuelve infinita, lo que sucede para x = 0 que no está definido =>

Sin tangentes verticales.

3A.018

Asíntotas verticales)?

$x \cdot y = k \quad e \quad x \neq 0 \quad e \quad y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2} = -k \cdot \frac{1}{x^2}$

Hay una asíntota vertical si la pendiente va hacia el infinito:

$y' \to \pm\infty$ => $-k \cdot \frac{1}{x^2} \to \pm\infty$

Lo que sucede para x ⟶ 0

como se puede ver en la función original $y = k \cdot \frac{1}{x}$

Por lo tanto la recta x = 0 es una asíntota vertical.

$x = 0$ es el eje y.

3A.019

$f(x) = (x^2 - 3x + 3)^{\frac{1}{3}}$ $x \in \mathrm{R}$ (x pertenece a todos los números reales) =>

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 3) = \frac{2x-3}{\frac{1}{3}(x^2-3x+3)^{\frac{2}{3}}}$

Tangentes horizontales para $f'(x) = 0$ =>

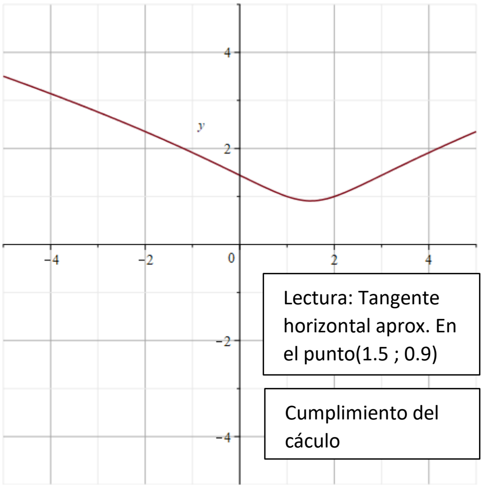
$2x - 3 = 0$ ⇔

$x = 1.5$

x insertado en f $f(x) = (1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 3)^{\frac{1}{3}}$

$f(x) \approx 0.909$

Sí, hay una tangente horizontal en (1.5 ; 0.909)



Lectura: Tangente horizontal aprox. En el punto(1.5 ; 0.9)

Cumplimiento del cáculo

3A.020

Usando la técnica: “exterior” · “interior”:

$f(x) = (4x-2)^3$ => $f´(\mathrm{x}) = 3(4x-2)^2 \cdot 4$

$g(x) = (2x-2)^{½}$ => $g´(x) = \frac{1}{2}(2x-2)^{-½} \cdot 2$

$h(x) = (x^3+x^2)^{½}$ => $h´(x) = \frac{1}{2}(x^3+x^2)^{-½} \cdot (3x^2+2x)$

$i(x) = (e^x-3x)^5$ => $i´(\mathrm{x}) = 5(e^x-3x)^4 \cdot (e^x-3)$

$j(x) = (5^x+2)^{-3}$ => $j´(x) = -3(5^x+2)^{-4} \cdot (5^x \cdot ln5)$

y la regla del producto

$k(x) = xe^x$ => $k´(\mathrm{x}) = 1 \cdot e^x + xe^x$

3A.021

$f(x) = e^{3x}$ => $f´(x) = 3e^{3x}$

$g(x) = 3^x$ => $g´(x) = 3^x \cdot ln\,3$

$h(x) = e^{3x+2}$ => $h´(x) = e^{3x+2} \cdot 3$

$i(x) = -7e^{2x}$ => $i´(x) = -7e^{2x} \cdot 2$

$j(x) = ln(4x^3+x^2)$ => $j´(x) = \frac{1}{4x^3+x^2} \cdot (12x^2+2x)$ ⇔

$j´(x) = \frac{x(12x+2)}{x(4x^2+x)}$ ⇔

$j´(x) = \frac{12x+2}{4x^2+x}$

$$k(x) = x^2e^x \quad => \quad k'(x) = 2xe^x + x^2e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$k'(x) = e^x(2x + x^2)$$

3A.022

$$y = ln\, x \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = -x^{-2}$$

$$y = \frac{ln\, x}{x^2} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - lnx \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - lnx \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot lnx}{x^3}$$

$$y = \frac{x^2}{lnx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{2x \cdot\, lnx - \frac{1}{x} \cdot x^2}{(ln\, x)^2} = \frac{2x \cdot\, lnx - x}{(ln\, x)^2} = \frac{x(2\, lnx - 1)}{(ln\, x)^2}$$

3A.023

$f(x) = 4lnx - (lnx)^4 \quad y \quad x > 0$

Intersección con el eje x dónde y = 0 =>

$4lnx - (lnx)^4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$lnx(4 - (ln\, x)^3) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$ln\, x = 0 \quad y \quad 4 - (ln\, x)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = 1 \quad y \quad (ln\, x)^3 = 4 \quad \Leftrightarrow$

$x = 1 \quad y \quad ln\, x = 4^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow$

$x = 1 \quad y \quad x \approx e^{1.59} \approx 4.89$

Tangente horizontal dónde

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \quad => \quad 4 \cdot \frac{1}{x} - 4(lnx)^3 \cdot \frac{1}{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$4 - 4(lnx)^3 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$(lnx)^3 = \frac{4}{4} = 1 \qquad \Leftrightarrow$

$ln\,x = 1^{\frac{1}{3}} = 1 \qquad \Leftrightarrow$

$x = e$

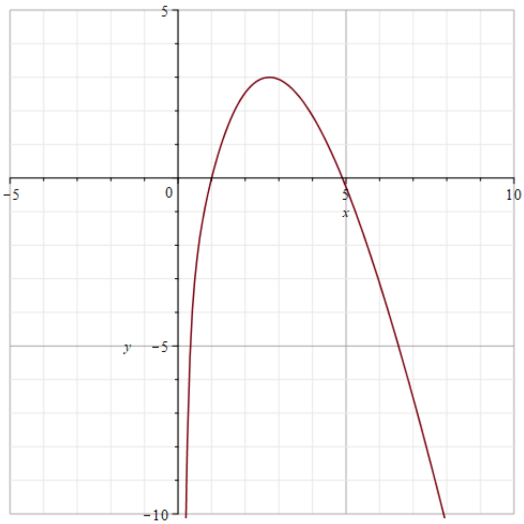
Lo que insertado en la función da:

$f(x) = 4lnx - (lnx)^4 \; =>$

$f(e) = 4lne - (lne)^2 = y \qquad \Leftrightarrow$

$y = 4 - 1 = 3$

Combinados, tenemos solo una tangente horizontal en el punto: (e, 3)
Si insertamos valores de x en el intervalo]0, e[obtenemos valores de y menores que 3. Por lo tanto, (e, 3) es un máximo.



Cumplimiento.

3A.024

$f(x) = \sin x - \cos x$ $\quad$ $f'(x) = \cos x + \sin x$

$g(x) = 4\cos x + 2x - 8$ $\quad$ $g'(x) = -4\sin x + 2$

$h(x) = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$ $\quad$ $h'(x) = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

$i(x) = 4\tan x + 2$ $\quad$ $i'(x) = 4 + 4(\tan x)^2$

3A.025

$y = cos\, 2x$ => $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (-\,sin\, 2x)$ interior exterior

$y = sin\frac{1}{x}$ => $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} cos\frac{1}{x}$

$y = sin(x^2 + x)$ => $\frac{dy}{dx} = (2x + 1) \cdot cos(x^2 + x)$

$y = (sin\,x)^4 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = cos\,x \cdot 4(sin\,x)^3$

$y = sin\,x^4 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 \cdot cos\,x^4$

$y = 2(tan\,x)^2 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = (1 + (\tan x)^2) \cdot 4\,tan\,x$

3A.026

$y = sin\,x \cdot sin\,x \quad => \quad y' = cos\,x \cdot sin\,x + sin\,x \cdot \cos x$

$\Leftrightarrow \quad y' = 2 \cdot cos\,x \cdot sin\,x$

$y = (cos\,x)^2 = \cos x \cdot cosx$

$=> \quad y' = -sin\,x \cdot cos\,x + cos\,x \cdot (-sin\,x)$

$\Leftrightarrow \quad y' = -2 \cdot sin\,x \cdot cos\,x$

$y = 2sin\,x - \frac{1}{2}cos\,x \quad => \quad y' = 2cos\,x + \frac{1}{2}sin\,x$

$y = 3tanx + 4 \quad => \quad y' = 3(1 + (\tan x)^2)$

$\Leftrightarrow \quad y' = 3 + 3(\tan x)^2$

3A.027

El camino corto:

máx. = amplitud + k = 1,5 + 0,5 = 2

mín. = amplitud - k = -1,5 + 0,5 = -1 =>

rango = [-1; 2]

El camino largo:

$$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t+3) + 0.5 \quad => \quad \frac{df(x)}{dx} = 1.5 \cdot \cos(2t+3) \cdot 2$$

$(2t+3)$ es el angulo.

Tangente horizontal para el coeficiente diferencial = la pendiente = 0

$$1.5 \cdot \cos(2t+3) \cdot 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\cos(2t+3) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$cos^{-1}(\cos(2t+3)) = cos^{-1}0 \qquad \Leftrightarrow$$

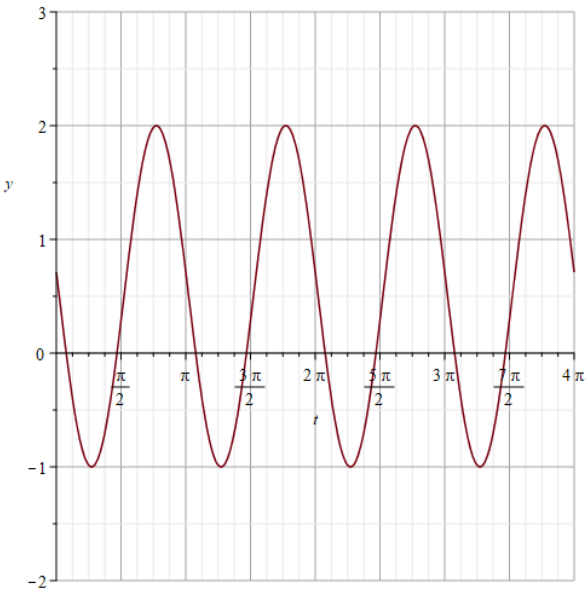
$$(2t+3) = \frac{\pi}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2}$$

insertado en la función:

$$f(t) = 1.5 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 0.5 \qquad => \quad 1.5 \cdot 1 + 0.5 = 2$$

$$f(t) = 1.5 \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) + 0.5 \quad => \quad 1.5 \cdot (-1) + 0.5 = -1$$

Entonces, máx. en f(t) = 2 y mín. en f(t) = -1   y   rango = [-1; 2]



Cumplimiento.

3A.028

Podemos encontrar los valores de la función (en el segundo eje) antes y después del punto extremo y ver cómo cambian. Esta es la manera más fácil.

También podemos calcular la segunda derivada y´´ y así ver si la pendiente de las tangentes aumenta o disminuye. Aumentar implicaría un mínimo. Decrecer implicaría un máximo.

3A.029

Podemos encontrar los valores de la función (en el segundo eje) antes y después del punto extremo y ver cómo cambian. Esta es la manera más fácil.

También podemos calcular la segunda derivada y´´

Si y´´ aumenta con un signo cambiante, es un mínimo 

Si y´´ disminuye con un signo cambiante, es un máximo 

Si y´´ es positive antes y después, tenemos una pausa en una función creciente. 

Si y´´ es negativo antes y después, tenemos una pausa function decreciente. 

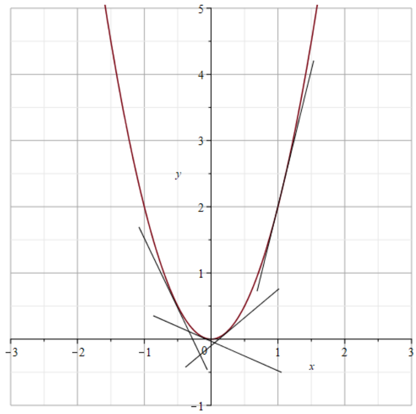
3A.030

$y = 2x^2$ => $y´ = 4x$ => $y´´ = 4$

y´´ es positivo, lo que significa que la pendiente tangente siempre aumenta para valores crecientes de x.

Por tanto (0,0) es un mínimo.

En la figura observamos tangentes con una pendiente cada vez mayor: al principio con una pendiente menos negativa, luego con una pendiente cada vez más positiva:



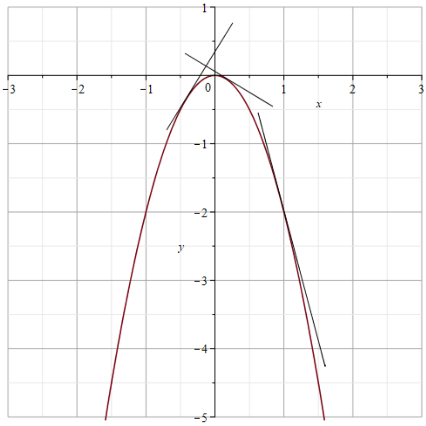
3A.031

$y = -2x^2$ => $y' = -4x$ => $y'' = -4$

y´´ es negativo, lo que significa que la pendiente tangente siempre disminuye para valores crecientes de x.

Por tanto (0,0) es un máximo.

En la figura observamos tangentes con pendiente cada vez menor: al principio con pendiente menos positiva, luego con pendiente cada vez más negativa:



3A.032

$f'(x) = 4x + 1 \quad => \quad f(x) = 4\frac{x^2}{2} + x + k$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = 2x^2 + x + k$

$g'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad => \quad g(x) = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + k$

$\Leftrightarrow \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$

$h'(x) = -x - \frac{4}{x^2} \quad => \quad h(x) = -\frac{x^2}{2} - 4(-x^{-1}) + k$

$h(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} + k$

$i'(x) = 4x^{-5} \quad => \quad i(x) = 4(\frac{x^{-4}}{-4}) + k$

$i(x) = -x^{-4} + k$

$j'(x) = \frac{1}{x^{½}} = x^{-½} \quad => \quad j(x) = \frac{x^{½}}{\frac{1}{2}} + k$

$j(x) = 2x^{½} + k$

$k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{½}} = x^{-½}$ => $k(x) = \frac{x^{½}}{\frac{1}{2}} + k$

⇔ $k(x) = 2x^{½} + k$

3A.033

$f(x) = 0$ => $F(x) = k$

$g(x) = 1$ => $G(x) = x + k$

$h(x) = 2\pi$ => $H(x) = 2\pi x + k$

$i(x) = \frac{5}{x^{½}} = 5x^{-½}$ => $I(x) = 5\frac{x^{½}}{\frac{1}{2}} + k$

⇔ $I(x) = 10x^{½} + k$

$j(x) = 8x^3 + 6x^{-4} - \frac{6}{x^6}$ => $J(x) = 8\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^{-3}}{-3} - 6\frac{x^{-5}}{-5} + k$

⇔ $J(x) = 2x^4 - 2x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-5} + k$

$k(x) = 2e^x$ => $K(x) = 2e^x + k$

3A.034

$f'(x) = 2x - 9$ => $f(x) = x^2 - 9x + k$

$g'(x) = x^{-6} - \frac{1}{x}$ => $g(x) = \frac{x^{-5}}{-5} - ln\ |x| + k$

$h'(x) = 15^x$ => $h(x) = \frac{15^x}{ln15} + k$

3A.035

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}} = \frac{2^x}{1^x} = \left(\frac{2}{1}\right)^{x} = 2^x$ =>

$F(x) = \frac{2^x}{ln2} + k$

$g(x) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 9 + 12x$ =>

$G(x) = \frac{4}{3}x^3 + 9x + 6x^2 + k$

$h(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$ =>

$H(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + k$

3A.036

$f(x) = 2x + 3$	=>	$F(x) = x^2 + 3x + k$
(2,0) insertado	=>	$F(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + k = 0$
	⇔	$k = -10$
k insertado	=>	$F(x) = x^2 + 3x - 10$

$g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$	=>	$G(x) = \frac{x^3}{3} - x^{-1} + k$
(2,0) insertado	=>	$G(2) = \frac{2^3}{3} - 2^{-1} + k = 0$
	⇔	$k = -\frac{8}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{16}{6} + \frac{3}{6} = -\frac{13}{6}$
k insertado	=>	$G(x) = \frac{x^3}{3} - x^{-1} - \frac{13}{6}$

$h'(x) = 4x^3 + 2x$ => $H(x) = x^4 + x^2 + k$

(2,0) insertado => $H(2) = 2^4 + 2^2 + k = 0$

⇔ $k = -20$

k insertado => $H(x) = x^4 + x^2 - 20$

3A.037

$f(x) = x^{-½}$ y x > 0 => $F(x) = 2x^{½} + k \quad y \quad x > 0$

F(16) = 16 => $F(16) = 2 \cdot 16^{½} + k = 16$

⇔ $k = 8$

k insertado => $F(x) = 2x^{½} + 8 \quad y \quad x > 0$

3A.038

$f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x - 1$ ⇔

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (4x^3 + 9x^2 + 4x - 1)\,dx$ =>

$F(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + k$

(1,8) => $1^4 + 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + k = 8$

⇔ $k = 3$

=> $F(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 3$

3A.039

$\mathrm{F(x) = x + \sin x \cdot \cos x}$ =>

$$f(x) = 1 + \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \qquad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 1 + (\cos x)^2 - (\sin x)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

Y usando la relación básica:

$$f(x) = (\cos x)^2 + (\cos x)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2(\cos x)^2$$ Mostrada.

3A.040

$\int (2x-3)^3\, dx \;=$ $\qquad t = 2x - 3 \quad =>$ sustitución

$\int t^3 \frac{dt}{2} \;=$ $\qquad \frac{dt}{dx} = 2 \quad =>$

$\frac{1}{2} \int t^3 \frac{dt}{2} \;=$ $\qquad dx = \frac{dt}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot t^4 + k_t \;=$

$\frac{1}{8}(2x-3)^4 + k_x$ $\qquad t = 2x - 3$ insertado y k desplazando

$\int x(4x^2-1)^4\, dx \;=$ $\qquad t = 4x^2 - 1 \quad =>$

$\int x \cdot t^4 \frac{dt}{8x} \;=$ $\qquad \frac{dt}{dx} = 8x \quad =>$

$\frac{1}{8} \int t^4\, dt \;=$ $\qquad dx = \frac{dt}{8x}$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} t^5 + k_t \;=$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}(4x^2-1)^5 + k_x$

3A.041

$\int \sin 2x \cdot x \ dx \quad =$ Parcial

$\left(-\frac{1}{2} cos\ 2x\right) \cdot x - \int \left(-\frac{1}{2} cos\ 2x\right) \cdot 1\ dx \quad =$ y sustitución

$-\frac{1}{2} x \cdot cos\ 2x + \frac{1}{2} \int cos\ 2x\ dx \quad =$

$-\frac{1}{2} x \cdot cos\ 2x + \frac{1}{4} sin\ 2x + k$

$\int\ sin\, x \cdot x^2\ dx \quad =$ Parcial

$(-cos\ x) \cdot x^2 - \int (-cos\ x) \cdot 2x\ dx \quad =$

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2 \int\ cos\ x \cdot x\ dx \quad =$

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2\ (sin\, x \cdot x - \int\ sin\ x \cdot 1\ dx) \quad =$ Parcial de nuevo

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2x \cdot sin\, x - 2 \int\ sin\ x\ dx \quad =$

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2x \cdot sin\, x + 2 \cos x + k$

3A.042

Calcular las integrales específicas.

$\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2)\ dx \quad = \quad [x^3 - 3x^2 + 2x]^2{}_0 \ =$

$(8 - 12 + 4) - (0 - 0 + 0) \quad = \quad 0$

$\int_1^2 (x^2 + 1)\ dx \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3} + x\right]^2{}_1 \ =$

$$\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right) \;=\; \left(\frac{8}{3}+\frac{6}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right) \;=\; \frac{10}{3}$$

3A.043

$$\int_0^5 (y^2-2y)\,dy \;=\; \left[\frac{y^3}{3}-y^2\right]^5{}_0 \;=\; \left(\frac{125}{3}-25\right)-(0-0) = \frac{50}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin u\,du \;=\; [-cos\,u]^\pi{}_0 \;=\; -\cos\pi-(-\cos 0) \;=$$

$$1+1 \;=\; 2$$

3A.044

$$\int_0^1 (x^2+1)x^{½}\,dx \;=\; \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}}+x^{½}\right)\,dx \;=\; \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]^1{}_0 \;=$$

$$\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\right)-(0+0) \;=\; \frac{6}{21}+\frac{14}{21} \;=\; \frac{20}{21}$$

$$\int_0^\pi (sin\,x+x)\,dx \;=\; \left[-cos\,x+\frac{x^2}{2}\right]^\pi{}_0 \;=$$

$$(-\cos\pi+\frac{\pi^2}{2})-(-\cos 0+0) \;=\; \left(1+\frac{\pi^2}{2}\right)-(-1) \;=\; \frac{\pi^2}{2}+2$$

3A.045

$\int_{-½}^0 (y+1)^2\,dy$ $\qquad$ $t = y+1$ $\quad$ => $\quad$ sustitución

$\frac{dt}{dy} = 1$ $\quad$ =>

$$dy = dt$$

Limites cambiántes

$$t_{inferior} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$t_{superior} = 0 + 1 = 1$$ entonces

$$\int_{½}^{1} t^2\, dt \quad =$$

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]^1 ½ \quad =$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\frac{1}{8}}{3}\right) \quad = \quad \frac{8}{24} - \frac{1}{24} \quad = \quad \frac{7}{24}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(6-3y)^2}\, dy$$

$$t = 6 - 3y$$ => sustitución

$$\frac{dt}{dy} = -3$$ =>

$$dy = -\frac{dt}{3}$$

Limites cambiántes

$$t_{inferior} = 6 - 3(-1) = 9$$

$$t_{superior} = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

Entonces:

$$\int_{9}^{3} \frac{1}{t^2} \frac{-dt}{3} \quad =$$

$$-\frac{1}{3}\int_{9}^{3} \frac{1}{t^2}\, dt \quad = \quad -\frac{1}{3}\int_{9}^{3} t^{-2}\, dt \quad =$$

$$-\frac{1}{3}\left[-t^{-1}\right]^3{}_9 \quad = \quad \left(\frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{27}\right) \quad = \quad \frac{3}{27} - \frac{1}{27} \quad = \quad \frac{2}{27}$$

3A.046

$\int_{-2}^{-1}(y+1)^2\,dy$

$t = y+1$ => sustitución

$\frac{dt}{dy} = 1$ =>

$dy = dt$

Limites cambiántes

$t_{inferior} = -2+1 = -1$

$t_{superior} = -1+1 = 0$

Entonces:

$\int_{-1}^{0} t^2\,dt \quad =$

$\left[\frac{t^3}{3}\right]^{0}_{-1} \quad =$

$(0) - \left(-\frac{1}{3}\right) \; = \; \frac{1}{3}$

3A.048

$\int_{-2}^{-1}(y+1)^2\,dx \quad = \quad sin\,solución$

No es posible reunir todas las piezas dx muy pequeñas mediante una función y. O, si consideramos un área: no es posible encontrar el área completa a partir de microáreas donde un lado es dx y el otro es una función y. Tiene que ser x-x o y-y.

3A.049

$\int_{0}^{\pi}(\sin\frac{x}{2} + cos\,2x)\,dx \quad = \quad \int_{0}^{\pi} sin\frac{x}{2}\,dx \;+\; \int_{0}^{\pi} cos\,2x\,dx$

Ahora, calculamos las dos integrales por separado mediante sustitución:

$\int_0^{\pi} sin\frac{x}{2}\ dx$ $\quad t = \frac{x}{2}$ => sustitución

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$ =>

$dx = 2dt$

Limites cambiántes $\quad t_{inferior} = \frac{0}{2} = 0$

$t_{superior} = \frac{\pi}{2}$

Entonces:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot 2dt \ =$

$2[-cos]^{\frac{\pi}{2}}{}_0 \ = \ 0-(-2) = 2$

Y

$\int_0^{\pi} cos\ 2x\ \ dx$ $\quad t = 2x$ => sustitución

$\frac{dt}{dx} = 2$ =>

$dx = \frac{1}{2}dt$

Limites cambiántes $\quad t_{inferior} = 2 \cdot 0 = 0$

$t_{superior} = 2\pi$

Entonces:

$\int_0^{2\pi} cos\, t \cdot \frac{1}{2}dt \ =$

$\frac{1}{2}[sin\, t]^{2\pi}{}_0 \ = \ 0-0 = 0$

Conjunta: $2 + 0 = 2$

3A.050

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + sinx) \cdot cos\, x\, dx$ $\qquad$ $t = 1 + sinx \quad =>$ sustitución

$\frac{dt}{dx} = cos\, x \quad =>$

$dx = \frac{dt}{\cos x}$

Limites cambiántes $\qquad$ $t_{inferior} = 1$

$t_{superior} = 2$

Entonces:

$\int_1^2 t \cdot cos\, x \cdot \frac{dt}{\cos x} \quad =$

$\int_1^2 t \cdot dt \quad =$

$\left[\frac{1}{2}t^2\right]^2{}_1 \; = \; 2 - \frac{1}{2} \; = \; \frac{3}{2}$

3A.051

Probamos la integración por partes (integración parcial):

$$\int_0^{\pi} cos\, x \cdot (1 + x)\; dx \; = \; [sin\, x \cdot (1 + x)]^{\pi}{}_0 - \int_0^{\pi} sin\, x \cdot 1\; dx$$

$$= \; [sin\, x \cdot (1 + x)]^{\pi}{}_0 - [-cos\, x]^{\pi}{}_0$$

$$= \; (0 - 0) - (1 - 1) = 0$$

3A.052

Probamos la integración por partes (integración parcial):

$$\int_1^2 x^3 \cdot ln\, x \;\; dx \;\; = \;\; \left[\frac{1}{4}\, x^4 \cdot ln\, x\right]^2{}_1 - \int_1^2 \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x}\; dx \;\; =$$

$$4\, ln\, 2 - 0 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3\; dx \;\; = \;\; 4 \ln 2 - \frac{1}{16}\, [\, x^4]^2{}_1 \;\; =$$

$$4 \ln 2 - (1 - \frac{1}{16}) \;\; = \;\; 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

3A.053

$$\int_1^2 x(x^2 - 1)^4\; dx$$

$t = x^2 - 1$ => sustitución

$\frac{dt}{dx} = 2x$ =>

$dx = \frac{dt}{2x}$

Limites cambiántes $t_{inferior} = 1 - 1 = 0$

$t_{superior} = 4 - 1 = 3$

Entonces:

$$\int_0^3 x \cdot t^4\; \frac{dt}{2x} \;\; =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 t^4 dt \;\; =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^5}{5}\right]^3{}_0 \;\; =$$

$$\frac{1}{2} \cdot ((\frac{243}{5}) - (0)) \;\; = \;\; \frac{243}{10}$$

3A.054

$\int_1^9 \frac{ln\, x}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \int_1^9 ln\, x \cdot x^{-½}\; dx \;=$ Parcial

$[2x^{½} \cdot ln\, x]^9{}_1 - \int_1^9 x^{-1} \cdot 2x^{½}\; dx \;=$

$[2x^{½} \cdot ln\, x]^9{}_1 - 2\int_1^9 x^{-½}\, dx \;=$

$[2x^{½} \cdot ln\, x]^9{}_1 - 2[2x^{½}]^9{}_1 \;=$

$(6 \ln 9 - 2 \ln 1) - 2(6-2) \;=\; 6 \ln 9 - 8 \;\approx\; 5.18$

3A.055

$\int_1^4 \frac{3^{x^{½}}}{x^{½}}\, dx \;=$ $t = x^{½}$ => sustitución

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} x^{-½}$ => aquí aislamos dt

$2dt = x^{-½} \cdot dx$

Limites cambiántes $t_{inferior} = 1^{½} = 1$

$t_{superior} = 4^{½} = 2$

Entonces:

$\int_1^2 3^t \cdot 2dt \;=$

$2\int_1^2 3^t \cdot dt \;=$

$2\left[\frac{3^t}{\ln\, 3}\right]^2{}_1 \;=$

$2\left(\frac{9}{\ln 3}\right) - 2\left(\frac{3}{\ln 3}\right) \;=\; \frac{12}{\ln 3} \;\approx\; 0.91$

3A.056

$\int_0^a (2y+4)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [y^2+4y]^a{}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$a^2+4a-(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a+4) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$a = 0 \quad or \quad a = -4$

$\int_0^a (-6y+2)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [-3y^2+2y]^a{}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$-3a^2+2a-(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(-3a+2) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$a = 0 \quad or \quad a = \frac{2}{3}$

3A.057

$\int_1^2 ax\,dx = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a\left[\frac{x^2}{2}\right]^2{}_1 = 10 \quad \Leftrightarrow$

$a(2 - \frac{1}{2}) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{20}{3}$

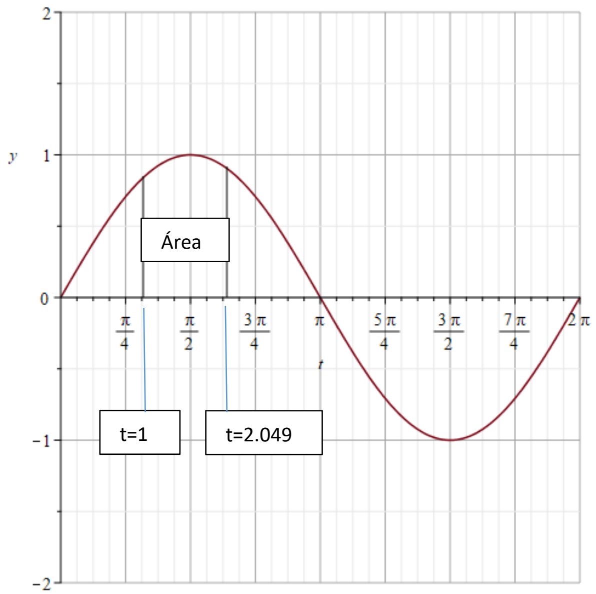
3A.058

$\int_1^a \sin t\,dt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [-\cos t]^a{}_1 = 1 \quad \Leftrightarrow$

$-\cos a - (-\cos 1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\cos a + 0.54 = 1$

$\cos a = 0.54 - 1 = -0.46 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 2.049\, rad.$

Entonces, si miramos una curva sinusoidal de 1 rad. a 2,049 rad., el área bajo esta parte de la curva es 1. Figura:



Parece correcto que el área que se muestra es 1.

3A.059

$f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x + 1 \quad y \quad g(x) = \frac{3}{4}x + 1$

Intersección para $\quad x^3 - \frac{1}{4}x + 1 = \frac{3}{4}x + 1 \quad \Leftrightarrow$

$x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x(x^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = 0 \quad y \quad x = 1 \quad y \quad x = -1$

¿Cuáles son los límites de nuestras integrales de área, pero qué curva es la curva superior, etc.? Sin embargo, simplemente haremos el cálculo y luego tomaremos el valor numérico si A resulta negativo:

$A = A_1 + A_2 \quad\quad =>$

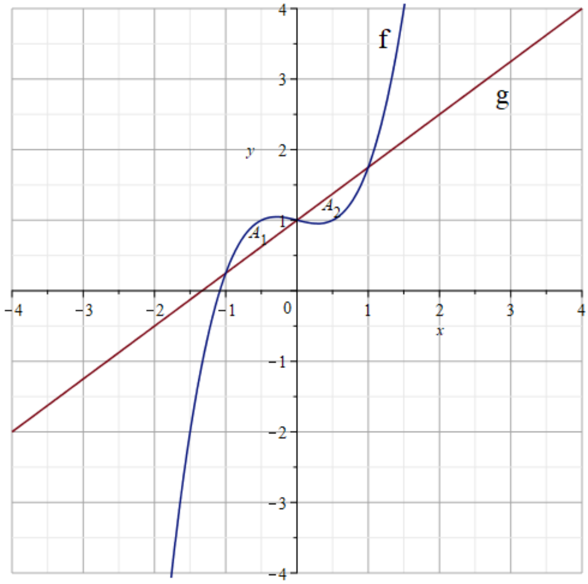
$A = \int_{-1}^{0}(f-g)dx + \int_{0}^{1}(f-g)dx$ =>

$A = \int_{-1}^{0}(x^3-x)dx + \int_{0}^{1}(x^3-x)dx$ ⇔

$A = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]^{0}_{-1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]^{1}_{0}$ ⇔

$A = \left(0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}$

Ambas áreas (A1 y A2) resultaron positivas, por lo que no necesitamos interferir tomando valores numéricos.



3A.060

$y = 1 - x^2$ interseca el eje x para y = 0 =>

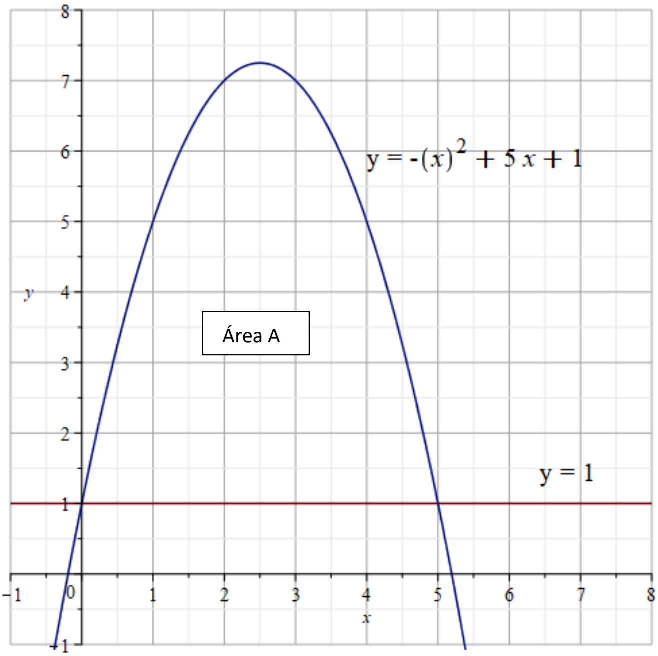
$1 - x^2 = 0$ ⇔ $x = -1 \quad y \quad x = 1$ =>

$Área = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]^{1}_{-1} =$

$\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{-1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

3A.061

$y=-x^2+5x+1$ y $y=1$



Intersección $-x^2+5x+1=1 \quad \Leftrightarrow$

$x(5-x)=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=0 \quad y \quad x=5$ (= lectura) =>

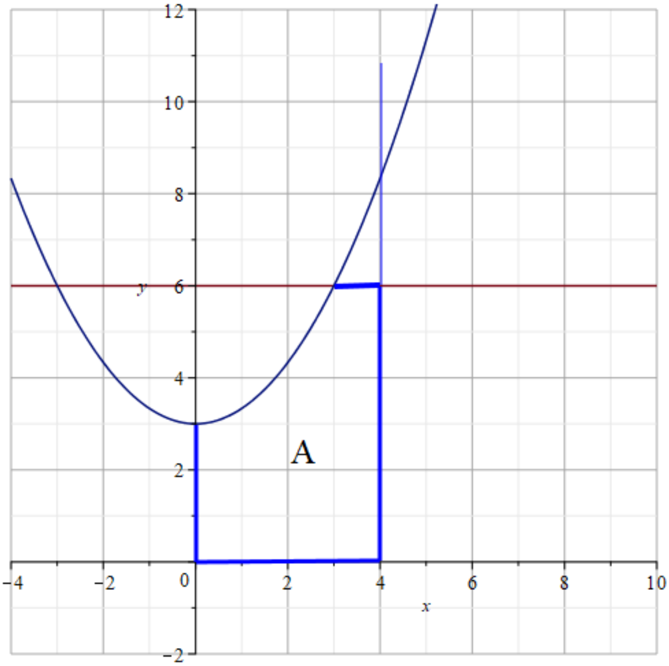
El área se encuentra teniendo: curva superior *menos* curva inferior entre los límites encontrados (0 y 5):

$A=\int_0^5((-x^2+5x+1)-(1))\,dx=\int_0^5((-x^2+5x)\,dx=$

$\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{125}{6}$

3A.062

x = 0 x = 4 y = 0 y = 6 y = $\frac{1}{3}x^2 + 3$



Parábola de intersección y línea y = 6

$\frac{1}{3}x^2 + 3 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 + 3 = 6 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3$

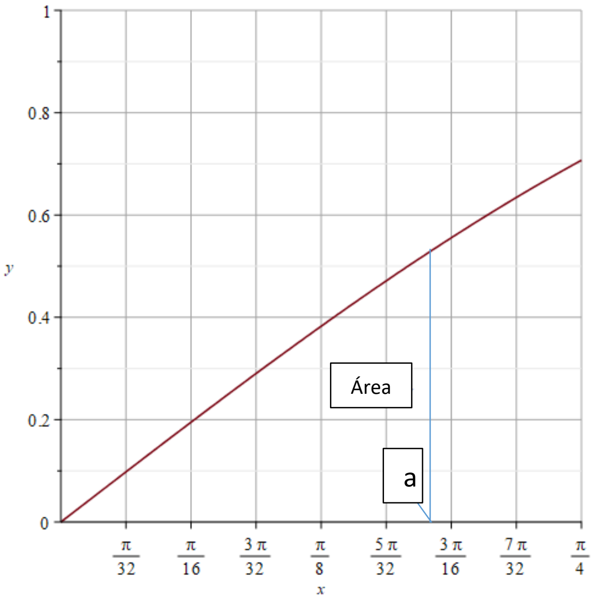
Entonces A puede calcularse como el área bajo la parábola de x = 0 a x = 3 más el rectángulo bajo y = 6 e de x = 3 a x = 4

$$A = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 3\right) dx + (1 \cdot 4) =$$

$$\left[\frac{x^3}{9} + 3x\right]_0^3 + 4 = \big((3 + 9) - (0)\big) + 4 = 16$$

3A.063

$y = \sin x$



$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \ dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0) =$

$-0.707 + 1 \approx 0.293$

Ahora encontramos una:

$\int_0^{a} \sin x \ dx = \frac{A}{2} \approx 0.146 \quad \Leftrightarrow$

$[-\cos x]^{a}{}_{0} = -cos\ a - (-\cos 0) = 0.146 \quad \Leftrightarrow$

$-cos\ a + 1 = 0.146 \quad \Leftrightarrow$

$cos\ a = -0.146 + 1 \quad \Leftrightarrow$

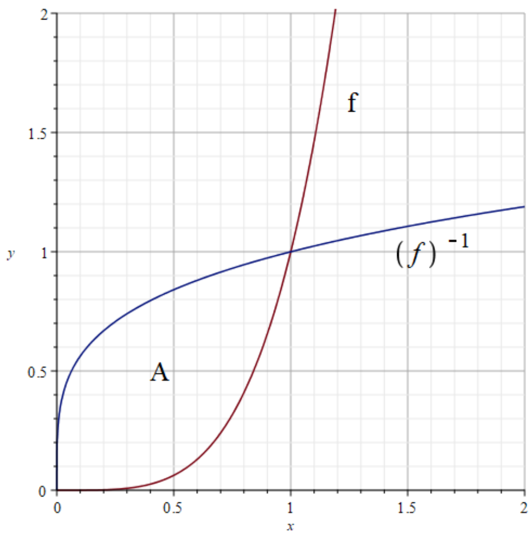
$a \approx 0.547$

3A.064

$y = x^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^{\frac{1}{4}} = x$

Nosotras intercambiamos los nombres: $x^{\frac{1}{4}} = y$ o $y = x^{\frac{1}{4}}$

Mejores nombres: $f(x) = x^4$ y $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{4}}$ $para \ \ x \geq 0$



Intersección $\qquad x^4 = x^{\frac{1}{4}}$

adivinando raíces $\qquad$ => $\qquad x = 0 \ \ y \ \ x = 1$ $\qquad$ =>

$$A = \int_0^1 (\frac{x^4}{4} - x^4)\, dx = \left[\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) - (0) = \frac{3}{5}$$

Fórmula $\qquad V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$

Aquí $\qquad$ superior - inferior $\qquad$ =>

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^4)^2\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx - \pi \int_0^1 x^8\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]^1{}_0 - \pi \left[\frac{1}{9} x^9\right]^1{}_0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \pi \left(\frac{1}{9} - 0\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \frac{5}{9}\pi \approx 1.75$$

3A.065

Fórmula $\quad V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx \qquad =>$

Aquí $\quad V_x = \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 2)^2 \cdot dx \qquad \Leftrightarrow$

$$V_x = \pi \int_{-1}^2 (x^4 + 4 + 4x^2)\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

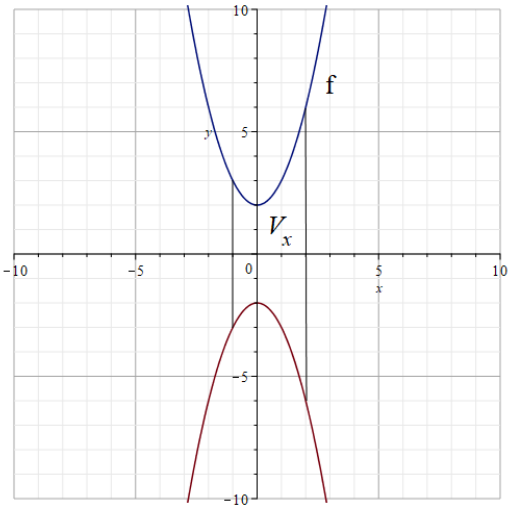
$$V_x = \pi \left[\frac{x^5}{5} + 4x + \frac{4x^3}{3}\right]^2{}_{-1} \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \left(\frac{32}{5} + 8 + \frac{32}{3}\right) - \pi \left(-\frac{1}{5} - 4 - \frac{4}{3}\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \left(\frac{96}{15} + \frac{120}{15} + \frac{160}{15}\right) - \pi \left(-\frac{3}{15} - \frac{60}{15} - \frac{20}{15}\right) \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \left(\frac{376}{15} + \frac{83}{15}\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \frac{459}{15}\pi \approx 96.1$$



3A.066

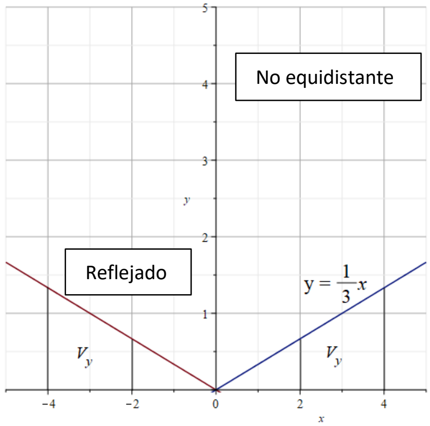
Fórmula $\qquad V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$

$y = \frac{1}{3}x \quad => \quad V_y = 2\pi \int_2^4 x \cdot \frac{1}{3}x \;\, dx \quad \Leftrightarrow$

$$V_y = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = \frac{110}{9}\pi \approx 38.4$$

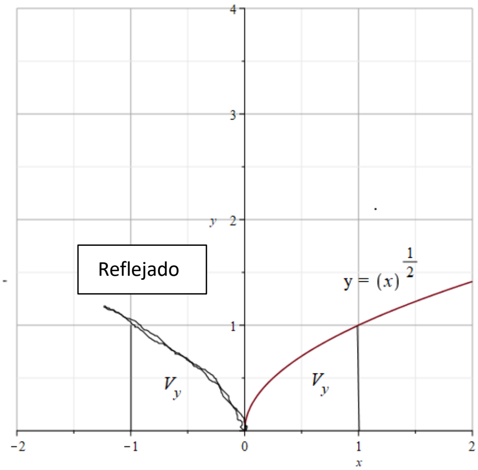


$$y = \sqrt{x} = x^{½} \qquad V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{½}\ dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left(\frac{2}{5} - 0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = \frac{4}{5}\pi \approx 2.51$$



La curva esbozada a mano y reflejada no está definida matemáticamente, por lo que es solo un boceto de trabajo para indicar el volumen.

3A.067

$y = x^{-\frac{3}{2}}$ =>

$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{-\frac{3}{2}}\ dx = 2\pi[2x^{½}]^4{}_2 = 2\pi(4 - 2 \cdot 2^{½}) \approx$
$2.34\pi \approx 7.36$

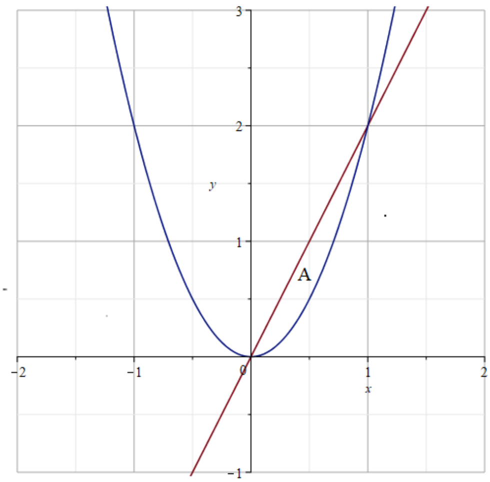
3A.068

$f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 2x$ =>

Intersección para $2x^2 = 2x \iff 2x^2 - 2x = 0 \iff$

$x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff$

$x = 0$ y $x = 1$



$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot 2x\ dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot 2x^2\ dx \iff$

$V_y = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 - 2\pi \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 \iff$

$V_y = 2\pi\left(\frac{2}{3} - 0\right) - 2\pi\left(\frac{2}{4} - 0\right) = \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

3A.069

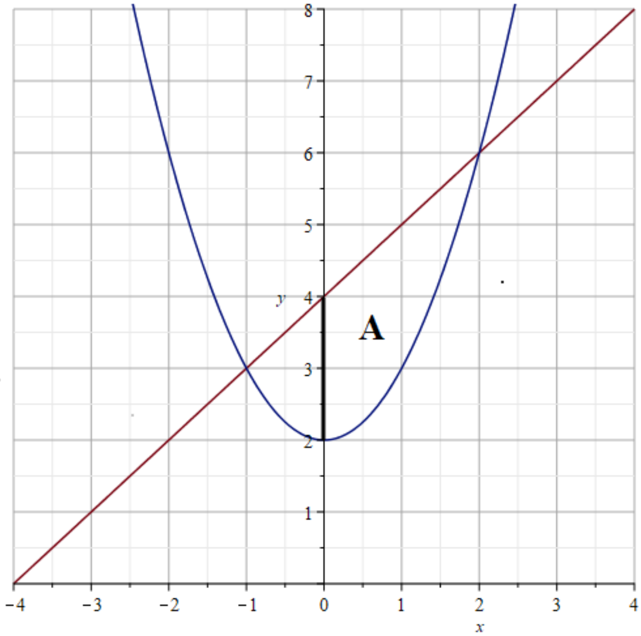
$f(x) = x^2 + 2 \quad y \quad g(x) = x + 4$ =>

Intersección para $\quad x^2 + 2 = x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = x = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \quad y \quad x = 2$$

Área solo en el primer cuadrante => límites: x = 0 y x = 2



$$V_y = 2\pi \int_0^2 x \cdot (x + 4)\ dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot (x^2 + 2)\ dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left(\frac{8}{3} + 8\right) - 2\pi(4 + 4) = \frac{16}{3}\pi$$

3A.070

Guldin 1: Área de superficie = ancho · 2 πr =>

$A = (x_1 - x_2) \cdot 2\pi \cdot r$ =>

$A = (40 - 20) \cdot 2\pi \cdot 50$ ⇔

$A = 2000\,\pi \approx 6283$

Área de la sección transversal = ancho · espesor = 20 · 3 = 60

Guldin 2: $V = A \cdot 2\pi \cdot r$ =>

$V = 60 \cdot 2\pi \cdot 50$ ⇔

$V = 6000\,\pi \approx 18\,850$

3A.071

Guldin 2: $V = A \cdot 2\pi \cdot r$ =>

$V = (\pi \cdot 8^2) \cdot (2\pi \cdot 80)$ ⇔

$V = 10\,240\,\pi^2 \approx 101\,065$

3A.072

Fórmula $l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ dónde $f'(x) = y' = x^{½}$

Aquí $l = \int_0^2 (1 + (x^{½})^2)^{½}\, dx$ = sustitución

$\int_0^2 (1 + \mathrm{x})^{½}\, dx$ = $t = 1 + x$ =>

$\int_a^b t^{½}\, dt$ = $\frac{dt}{dx} = 1$ ⇔

$\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]^{b}{}_{a} \quad =$ $\qquad dx = dt$

$\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]^{2}{}_{0} \quad = \left(\frac{2}{3}(1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right) \approx 2.8 \quad =>$

$l \approx 2.8$

3A.073

Fórmula $\quad l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ $\quad$ dónde

$y = x^2 \quad => \qquad y' = 2x \qquad =>$

$l = \int_0^2 (1 + (2x)^2)^{½}\, dx \approx 4.65$

Para la mayoría de los CAS, simplemente escriba la integral y "Entrar". Quizás tengas que escribir "simplificar" o algo similar para obtener un número decimal.

3A.074

Fórmula $\quad l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ $\quad$ dónde

$y = \sin x \quad => \qquad y' = \cos x \qquad =>$

$l = \int_0^2 (1 + (cos\ x)^2)^{½}\, dx \approx 2.35$

Para la mayoría de los CAS, simplemente escriba la integral y "Entrar". Quizás tengas que escribir "simplificar" o algo similar para obtener un número decimal.

3A.075

$\frac{dy}{dx} = 2y$ => $y' - 2y = 0$

Theorema 1 $y' + ay = 0$ => $y = c \cdot e^{-ax}$

Aqui $y' - 2y = 0$ => $y = c \cdot e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{8}y$ => $y' + \frac{1}{8}y = 0$

Theorema 1 $y' + ay = 0$ => $y = c \cdot e^{-ax}$

Aquí $y' + \frac{1}{8}y = 0$ => $y = c \cdot e^{-\frac{1}{8}x}$

3A.076

$\frac{dy}{dx} = x^2$

Theorema 3 $y' + ay = h(x)$ =>

$y = e^{-ax} \cdot \int h(x) \cdot e^{ax} \cdot dx + c \cdot e^{-ax}$

Aquí $y' + 0 = x^2$ =>

$y = 1 \cdot \int x^2 \cdot 1 \cdot dx + c \cdot e^0$ ⇔

$y = \frac{x^3}{3} + c$

Punto (2,3) insertado $3 = \frac{2^3}{3} + c$ ⇔ $c = \frac{1}{3}$ =>

$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$

3A.077

$\frac{dy}{dx} - y = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' - y = 2$

Theorema 2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

Aquí $\qquad y' - y = 2 \quad => \quad y = -2 + c \cdot e^{x}$

Porque $\qquad a = -1 \quad y \quad b = 2$

Punto $(10, -2)$ insertado

$-2 = -2 + c \cdot e^{10} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{0}{e^{10}} = 0 \quad => \quad y = -2$

3A.078

$\frac{dy}{dx} - 3y = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' - 3y = -2$

Theorema 2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

Aquí $\qquad y' - 3y = -2 \quad => \quad y = \frac{2}{3} + c \cdot e^{3x}$

Porque $\qquad a = -3 \quad y \quad b = -2$

Punto $(\ln 4, -\frac{2}{3})$ insertado

$-\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + c \cdot e^{3 \cdot ln4} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{-\frac{4}{3}}{e^{3 \cdot ln4}} = \frac{-\frac{4}{3}}{64} = \frac{-4}{192} = \frac{-1}{48} \quad =>$

$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{48} \cdot e^{3x}$

3A.079

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \frac{y}{4} - 6 = 0$

Theorema 2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

Aquí $\qquad y' + \frac{y}{4} = 6 \quad => \quad y = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

Porque $\qquad a = \frac{1}{4} \quad y \quad b = 6 \quad => \quad \frac{b}{a} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24$

Punto (ln 2, ln 3) insertado

$$ln\,3 = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot ln2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{ln3 - 24}{e^{-\frac{1}{4} \cdot ln2}} \approx \frac{-22.9}{0.84} \approx -27.2 \quad =>$$

$$y \approx 24 - 27.2 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x}$$

3A.080

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{y}{4} - 6 = 0$$

Theorema 2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

Aquí $\qquad y' + \frac{y}{4} = 6 \quad => \quad y = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

Porque $\qquad a = \frac{1}{4} \quad y \quad b = 6 \quad => \quad \frac{b}{a} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24$

Punto (ln 16, ln e) = (ln 16, 1) insertado

$$1 = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot ln16} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{-23}{e^{-\frac{1}{4} \cdot ln16}} = -46 \quad =>$$

$$y = 24 - 46 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x}$$

3A.081

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{2y} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot y^{-1} \cdot dy = dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int y^{-1} \cdot dy = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} ln\, y + c_1 = x + c_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} ln\, y = x + c \quad \Leftrightarrow \quad ln\, y = 2x + 2c \quad \Leftrightarrow \quad e^{ln\, y} = e^{2x+2c} \quad \Leftrightarrow$$

$$y = e^{2x} \cdot e^{2c} \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{2x} \cdot k$$

3A.082

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-2} \cdot dy = \int dx \quad \Leftrightarrow$$

$$-y^{-1} + c_1 = x + c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = -x + c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{x+c}$$

Existe una constante formada por ambas integraciones, que se combinan para c.

Control por inserción en la ecuación diferencial original:

Lado izquierdo $\quad \frac{dy}{dx} = \left(-\frac{1}{x+c}\right)' \quad =>$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0-(1\cdot(-1))}{(x+c)^2} = \frac{1}{(x+c)^2}$$

Lado derecho $\quad y^2 = \left(-\frac{1}{x+c}\right)^2 = \frac{1}{(x+c)^2}$

Entonces, el lado izquierdo es igual al lado derecho => verdadero.

CAS arroja el mismo resultado. Cumplimiento.

3A.083

$y' = -2y + 2e^x$

Theorema 3 $\quad y' + ay = h(x) \quad =>$

$y = e^{-ax} \cdot \int h(x) \cdot e^{ax} \cdot dx + c \cdot e^{-ax}$

Aquí $\quad y' + 2y = 2e^x \quad =>$

$y = e^{-2x} \cdot \int 2e^x \cdot e^{2x} \cdot dx + c \cdot e^{-2x}$

Donde la integral $\quad \int 2e^x \cdot e^{2x} \cdot dx = 2\int e^{3x} dx = \frac{2}{3} e^{3x} \quad =>$

Insertado $\quad y = e^{-2x} \cdot \frac{2}{3} e^{3x} + c \cdot e^{-2x} \quad \Leftrightarrow$

Indeterminada $\quad y = \frac{2}{3} e^x + c \cdot e^{-2x}$

Punto (0,0) insertado $\quad 0 = \frac{2}{3} e^0 + c \cdot e^{-2 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow$

$0 = \frac{2}{3} + c \cdot 1 \quad \Leftrightarrow$

$c = -\frac{2}{3} \quad =>$

Específica $\quad y = \frac{2}{3} e^x - \frac{2}{3} e^{-2x}$

3A.084

$y' = xy + x \quad \Leftrightarrow \quad y' - xy = x$

Theorema 4 $\quad y' + g(x) \cdot y = h(x) \quad =>$

$y = e^{-G(x)} \cdot \int h(x) \cdot e^{G(x)} \cdot dx + c \cdot e^{-G(x)}$

Aquí $\quad y' - xy = x \quad =>$

Dónde $g(x) = -x \;\; => \;\; G(x) = -\frac{1}{2}x^2$ =>

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Dónde la the integral:

$\int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$ sustitución

$-\int x \cdot e^t \frac{dt}{x} =$ $t = -\frac{x^2}{2}$ =>

$-\int e^t dt =$ $\frac{dt}{dx} = -x$ ⇔

$-e^t = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $dx = -\frac{dt}{dx}$

Insertado/conjunta $y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot (-e^{-\frac{1}{2}x^2}) + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ ⇔

$y = -1 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ (indeterminada)

3A.085

$y' = xy$ ⇔ $y' - xy = 0$

Puede resolverse separando las variables (Teorema 0), pero aquí utilizamos el Teorema 4:

Theorema 4 $y' + g(x) \cdot y = h(x)$ =>

$$y = e^{-G(x)} \cdot \int h(x) \cdot e^{G(x)} \cdot dx + c \cdot e^{-G(x)}$$

Aquí $y' - xy = 0$ =>

Dónde $g(x) = -x \;\; => \;\; G(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$y \quad h(x) = 0$ =>

Insertado/conjunta $y = 0 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ $\Leftrightarrow$

$y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

(indeterminada)

Por tanto, el teorema 4 también se aplica en casos más simples y, por tanto, se utiliza ampliamente.

3A.086

$\frac{dy}{dt} = ay(m - y)$ => $y = \frac{m}{1+ce^{-amt}}$

Aqui m = 200 a = 0.001 y = 20 for t = 0 años

(0,20) insertado $20 = \frac{m}{1+ce^{-am \cdot 0}}$ $\Leftrightarrow$

$1 + c = \frac{200}{20}$ $\Leftrightarrow$

$c = 9$ =>

c insertado $y = \frac{200}{1+9 \cdot e^{-0.2t}}$

t para y = 50

$50 = \frac{200}{1+9 \cdot e^{-0.2t}}$ $\Leftrightarrow$ $1 + 9e^{-0.2t} = \frac{200}{50}$ $\Leftrightarrow$

$9e^{-0.2t} = 3$ $\Leftrightarrow$ $e^{-0.2t} = \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$

$ln\ e^{-0.2t} = ln\ \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$ $-0.2t \approx -1.019$ $\Leftrightarrow$

$t \approx 5{,}5\ años$

t para y = 100

$100 = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 9e^{-0.2t} = \frac{200}{100} \quad \Leftrightarrow$

$9e^{-0.2t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0.2t} = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow$

$ln\ e^{-0.2t} = ln\ \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad -0.2t \approx -2.197 \quad \Leftrightarrow$

$t \approx 11\ años$

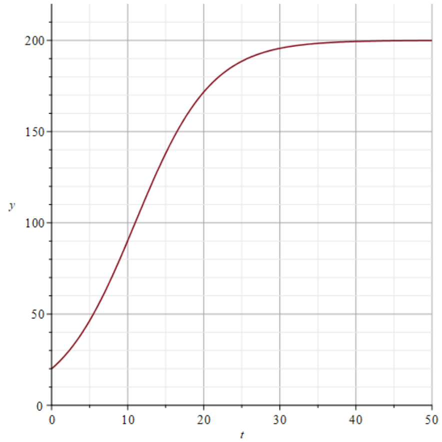
t for y = 199

$199 = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 9e^{-0.2t} = \frac{200}{199} \quad \Leftrightarrow$

$9e^{-0.2t} = -1 + \frac{200}{199} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0.2t} = 0.0056 \quad \Leftrightarrow$

$ln\ e^{-0.2t} = ln\ 0.0056 \quad \Leftrightarrow \quad -0.2t \approx -7.49 \quad \Leftrightarrow$

$t \approx 37\ años$



$y = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}}$ Cumplimiento para cálculo y lectura.

3A.087

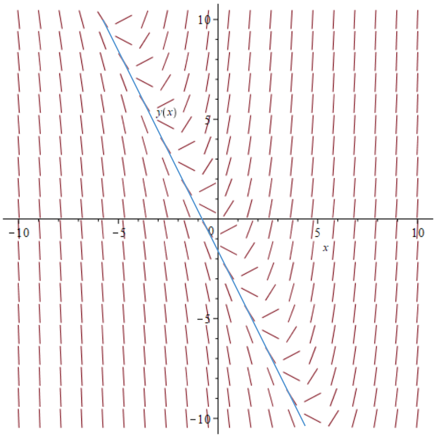
$y' = y + 2x$ resuelto: $y = -2x - 2 + ce^{x}$

Para c = 0 la curva solución será una línea recta con la ecuación:

equación: $y = -2x - 2 + 0 \cdot e^{x}$ ⇔

$y = -2x - 2$

que se muestra en el diagrama:



3A.088

$z = x^2 + y^3$ => $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$

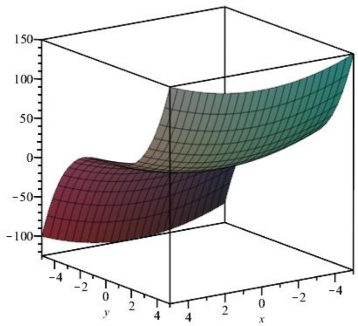
$z = x^2 + y^3$ => $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 = 3y^2$

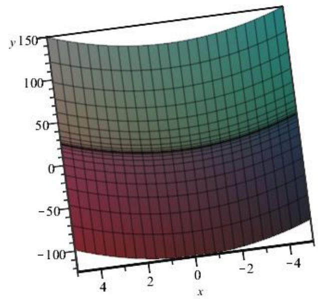
Debajo de la función $z = x^2 + y^3$ se muestra en tres figuras.

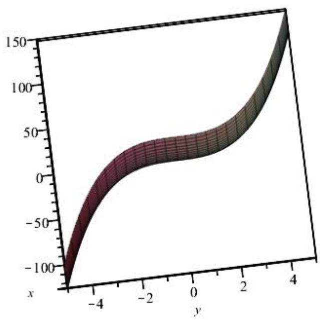
La Figura 1 muestra una descripción general.

En la figura 2 la curva 3D está girada, de modo que podemos ver el eje x y el eje z (hacia arriba). (La y pequeña que se muestra es para decirnos que la dirección y “sale del papel”). La cuadrícula nos facilita ver la pendiente de la curva. Aunque el sistema de coordenadas 3D no es equidistante, se ve que la pendiente tangente cumple con $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

En la figura 3 la curva 3D está girada, de modo que podemos ver el eje y y el eje z (hacia arriba). (La pequeña x que se muestra nos indica que la dirección x “sale del papel”). La cuadrícula nos facilita ver la pendiente de la curva. Aunque el sistema de coordenadas 3D no es equidistante, se considera que la pendiente tangente cumple con $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$







3A.089

$z = \frac{4}{3}x^3 + y - y^{½} \quad y \quad y \geq 0 \qquad =>$

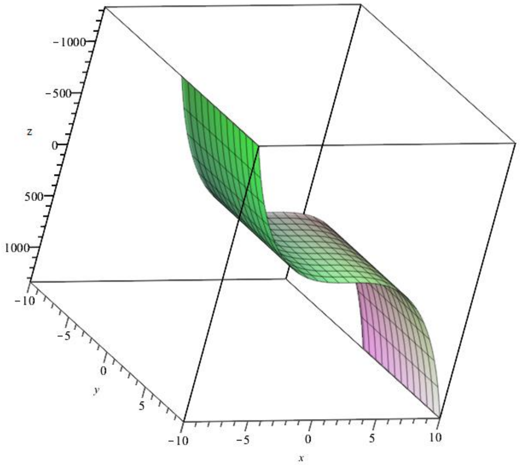
$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2 + 0 - 0 = 4x^2$ y

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 1 - \frac{1}{2}y^{-½} = 1 - \frac{1}{2}y^{-½}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

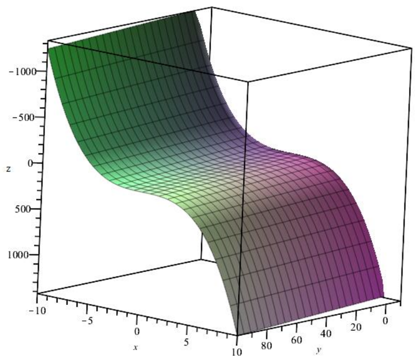
$x = 0$ *y todos los valores de y ≥ 0*

Entonces, en el plano x-z la curva tiene un punto estacionario para x = 0 en todos los valores de y ≥ 0. También vemos eso en una figura:



Vemos una línea en: *x = 0 y todos los valores de y ≥ 0*
Cumplimiento

(Por cierto, esta línea desciende un poco hacia +y, lo que se puede ver si aumentamos los valores de y del diagrama:



Como una silla inclinada hacia la derecha.

También podemos verlo desde la pendiente calculada en el plano (z,y):

Like a chair declining to the right.

We can also see it from the calculated slope in the (z,y) plane:

$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2} y^{-½}$ donde la pendiente está influenciada por y / es una función de y.

3A.090

$x - y = \frac{x}{z}$ ⇔ $z = \frac{x}{x-y}$ =>

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{0 \cdot (x-y) - x \cdot (0-1)}{(x-y)^2} = \frac{x}{(x-y)^2}$ la fórmula del cociente

3A.091

$z = \cos(xy) \quad => \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y \quad$ exterior/interior

3A.092

$z = 2x^2 + 3y^2 \quad =>$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 0 = 4x \quad$ y $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 6y = 6y$

$z = 2x^2 + 3y^2 \quad => \quad z = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 77 \quad =>$

$(x, y, z) = (1{,}5{,}77)$

La gradiente en $(1{,}5{,}77) = \binom{4x}{6y} = \binom{4 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \binom{4}{30}$

y $\quad |grad.| = (4^2 + 30^2)^{½} = 106^{½} \approx 10.3$

3A.093

$z = sin\, x - cos\, y \quad =>$

$\frac{\partial z}{\partial x} = cos\, x - 0 = cos\, x \quad$ y $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 - (-\sin y) = \sin y$

$z = sin\, x - cos\, y \quad => \quad z = sin \frac{\pi}{2} - cos \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow$

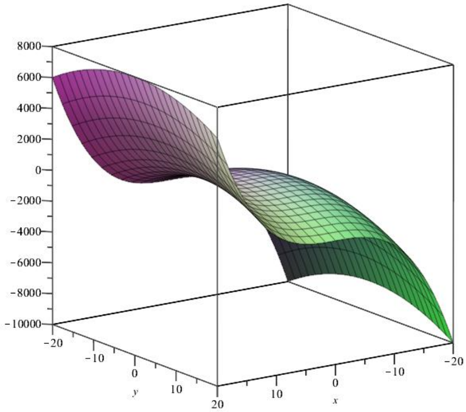
$z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293 \quad => \quad (x, y, z) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

La gradiente es $\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

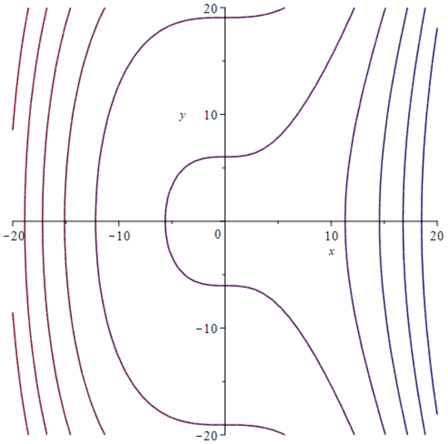
y $\qquad |grad.| = (0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2)^{½} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

3A.094

Visualización de la función $\qquad f(x, y) = z = x^3 - 5y^2$



Curva de nivel de la función $\qquad f(x, y) = z = x^3 - 5y^2$



3A.095

$f(x,y) = z = x^2 + y^2$ => $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$

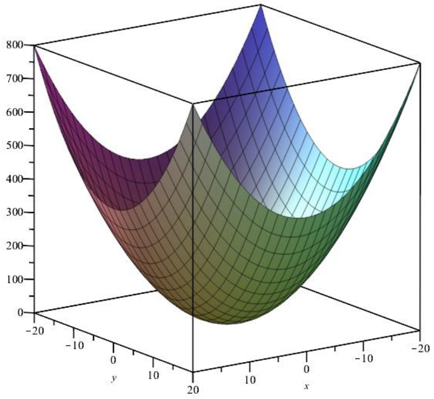
La segunda derivada es positiva, lo que significa que la pendiente tangente aumenta constantemente para valores de x mayores.

$f(x,y) = z = x^2 + y^2$ => $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

La segunda derivada es positiva, lo que significa que la pendiente tangente aumenta constantemente para valores de y mayores.

Combinadas tenemos tangentes con pendiente creciente, es decir (0,0,0) es un mínimo.

$f(x,y) = z = x^2 + y^2$ desplegado:



3A.096

$f(x,y) = z = -x^2 - y^2$ => $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$

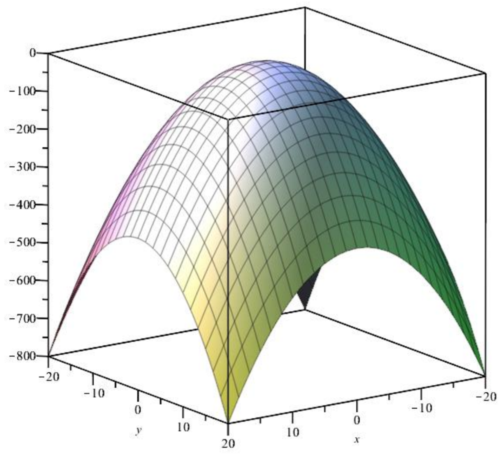
La segunda derivada es negativa, lo que significa que la pendiente tangente es cada vez menor para valores de x mayores.

$f(x,y) = z = -x^2 + -y^2$ => $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

La segunda derivada es negativa, lo que significa que la pendiente tangente es cada vez menor para valores de y mayores.

Combinadas tenemos tangentes con pendiente decreciente, es decir (0,0,0) es un máximo.

$f(x,y) = z = -x^2 - y^2$ desplegado:


0
−100
−200
−300
−400
−500
−600
−700
−800
−20
−10
0
10
20
y
20
10
0
−10
−20
x

Parte 3.

Sección B – soluciones propuestas

3B.001

$Perímetro = 3x + 2y$ (el triángulo es equilátero)

$Área = A_{rectángulo} + A_{triángulo} = xy + \frac{1}{2}x \cdot x \sin 60°$ ⇔

$A \approx xy + 0.433 \cdot x^2$

x e y se encuentran a partir de las dos ecuaciones que acabamos de encontrar:

$10 = 3x + 2y$ ⇔ $2y = 10 - 3x$ ⇔ $y = 5 - \frac{3}{2}x$

Insertada en A => $A = x\left(5 - \frac{3}{2}x\right) + 0.433x^2$ ⇔

$A = 5x - 1.5x^2 + 0.433x^2$ ⇔

$A = -1.067x^2 + 5x$

A tiene máximo para $\frac{dA}{dx} = 0$ =>

$-2.134x + 5 = 0$ ⇔

$x \approx 2.34\ metros$ =>

$y \approx 5 - \frac{3}{2}2.34 \approx 1.49\ metros$

3B.002

$$Perímetro = x + \frac{2\pi\frac{x}{2}}{2} + 2y = x + \frac{\pi}{2}x + 2y = 10 \qquad \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{10 - x - \frac{\pi}{2}x}{2} = 5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

$$Área = A_{rectángulo} + A_{medio\ circolo} = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

y insertada en A $\quad => \quad A = x(5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \Leftrightarrow$

$$A = 5x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$A \approx 5x - 0.5x^2 - 0.785x^2 + 0.393x^2 \Leftrightarrow$$

$$A \approx 5x - 0.892x^2$$

A tiene máximo para $\frac{dA}{dx} = 0 \qquad =>$

$$5 - 2 \cdot 0.892x = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x \approx \frac{5}{1.78} \approx 2.8\ metros \qquad =>$$

$$y \approx 5 - \frac{2.8}{2} - \frac{\pi}{4}2.8 \approx 1.4\ metros$$

Controlar: $\quad Perímetro = 2.8 + \frac{\pi}{2}2.8 + 2 \cdot 1.4 = 10 \quad lo\ cual\ esta\ bien$

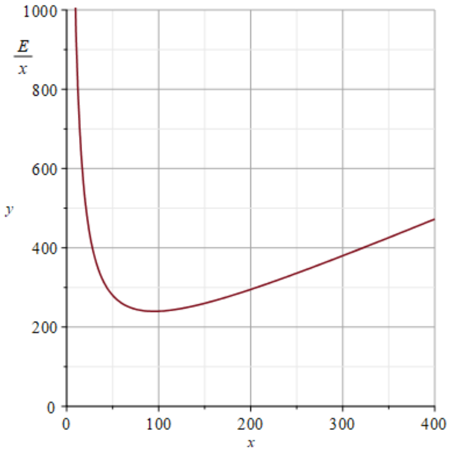
3B.003

$$E = 9000 + 50x + x^2 \qquad for\ 1 \leq x \leq 400$$

Los costos fijos son 9000

Los costos variables son $50x + x^2$

$$\frac{E}{x} = \frac{9000+50x+x^2}{x} \quad \text{dónde } \ 1 \leq x \leq 400$$



3B.004

$$\frac{E}{x} = \frac{9000+50x+x^2}{x} \quad \text{dónde } \ 1 \leq x \leq 400$$

El gasto mínimo por artículo es para

$$\frac{dE}{dx} = \left(\frac{E}{x}\right)' = 0 \qquad =>$$

$$\frac{(50+2x)x-1(9000+50x+x^2)}{x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$50x + 2x^2 - 9000 - 50x - x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 9000 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x \approx 95$$

$\frac{E}{x} = \frac{9000+50\cdot400+400^2}{400} \approx 473\ libras$

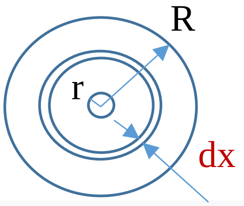
3B.005

$r_{media} = \frac{400+40}{2} = 220$

$número\ de\ vueltas = \frac{400-40}{0.2} = 1800$

$circunferencia = 2\pi \cdot r_{media} \approx 1382$

$longitud \approx 1382 \cdot 1800 \approx 2.488 \cdot 10^6 mm \approx 2488\ metros$



El radio variable de r a R se llama x =>

circunferencia de una vuelta/capa $= 2\pi \cdot \mathrm{x}$

Número de vueltas en el anillo mostrado $= \frac{dx}{0.2}$

Longitud de la cinta de película en el anillo que se muestra:

$dL = 2\pi \cdot \mathrm{x} \cdot \frac{dx}{0.2}$ =>

Duración total de la película de r a R: $\int dL = \int_r^R 2\pi \cdot \mathrm{x} \cdot \frac{dx}{0.2}$ $\Leftrightarrow$

$L = \frac{2\pi}{0.2} \int_r^R \mathrm{x}\, dx$ $\Leftrightarrow$ $L = 10\pi \left[\frac{1}{2} x^2\right]_r^R$ $\Leftrightarrow$

$L = 10\pi\ (\frac{1}{2}(R^2 - r^2))$ $\Leftrightarrow$ $L = 5\pi(400^2 - 40^2)$ $\Leftrightarrow$

$L \approx 2.488 \cdot 10^6 mm \approx 2488\ metros$

Cumplimiento.

3B.006

$A_{o-anillo} = \frac{\pi}{4}\, d^2 = \frac{\pi}{4}\, 5.8^2 \approx 26.42\, mm$

Volumen de o-anillo, Guldin 2:

$V_{o-anillo} = A_{o-anillo} \cdot 2\pi\mathrm{R} = 26.42 \cdot 2\pi \cdot 60$
$\Leftrightarrow$

$V_{o-anillo} = 9960\, mm^3$ cual es 98% =>

$V_{ranura} = \frac{100}{98} \cdot 9960 = 10163$ cual es 100%

Volume de ranura, Guldin 2:

$V_{ranura} = A_{ranura} \cdot 2\pi\mathrm{R}$ $\Leftrightarrow$

$10163 = (6 \cdot \mathrm{h}) \cdot 2\pi \cdot 60$ $\Leftrightarrow$

$h = \frac{10163}{6 \cdot 2\pi \cdot 60}$ $\Leftrightarrow$

$h \approx 4.49\, mm$

3B.007

$V = largo \cdot ancho \cdot alto = l \cdot w \cdot h$ =>

$V = (450 - 2x) \cdot (300 - 2x) \cdot x$ $\Leftrightarrow$

$V = (135\,000 - 900x - 600x + 4x^2)x$ $\Leftrightarrow$

$V = 135\,000x - 1500x^2 + 4x^3$ =>

$V' = 135\,000 - 3000x + 12x^2$

V tiene máxima para V´= 0 =>

$$12x^2 - 3000x + 135\,000 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4 \cdot 12 \cdot 135000}}{2 \cdot 12} = \frac{3000 \pm 1587}{2 \cdot 12} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x \approx 58.9\ mm \quad (and\ \ 191)$$

3B.008

Como el volumen se da en litros = dm^3 (decímetro cúbico), todas las longitudes estarán en dm y todas las áreas estarán en dm^2

Dos ecuaciones con dos incógnitas:

$V = A \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h = 2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{8}{\pi d^2}$ insertada en:

$$A = A_{cilindro} + A_{fondo\ y\ tapa} = \pi dh + 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \qquad =>$$

$$A = \pi d \frac{8}{\pi d^2} + \frac{\pi}{2} d^2 = \frac{8}{d} + \frac{\pi}{2} d^2 \qquad =>$$

$$A' = -\frac{8}{d^2} + \frac{\pi}{2} 2d$$

A tiene mínimo para A´= 0 =>

$$\frac{8}{-d^2} + \pi d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - \pi d^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d^3 = \frac{8}{\pi} \quad \Leftrightarrow$$

$d = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.37\ dm$ (CAS) => $h = \frac{8}{\pi \cdot 1.37^2} \approx 1.37\ dm$

Y el Área $A = \frac{8}{d} + \frac{\pi}{2} d^2 = \frac{8}{1.37} + \frac{\pi}{2} 1.37^2 \approx 8.84\ dm^2$

3B.009

Función parábola $y = ax^2 + bx + c$

Aquipara $x = 0 \quad => \quad y = c = 5$

y $\quad para \quad y = 0 \quad => \quad 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5 \qquad ec.1$

así como $\quad para \quad y = 0 \quad => \quad 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 5 \quad ec.2$

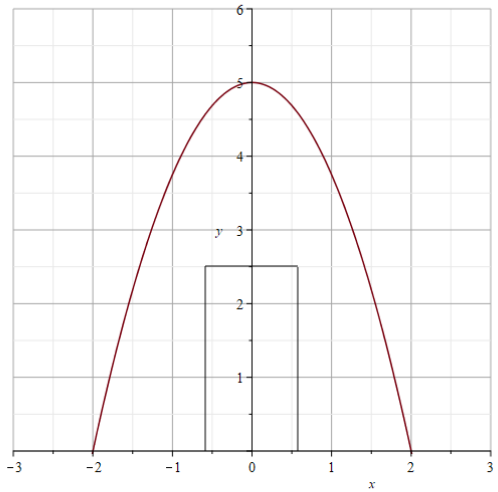
Las dos últimas ecuaciones dan:

$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 5 \qquad \Leftrightarrow$

$4a + 2b + 5 = 4a - 2b + 5 \qquad \Leftrightarrow$

$b = 0$ en *ec.1*: $\quad 0 = a \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-5}{4}$

Entonces, centro de parábola $\quad y = -1.25x^2 + 5$



Volumen fórmula $\quad V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$

Aquí $\quad V_y = 2\pi \int_0^2 x(-1.25x^2 + 5)\, dx \quad \Leftrightarrow$

$$V_y = 2\pi \int_0^2 (-1.25x^3 + 5x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left[\frac{-1.25x^4}{4} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi\left(\frac{-1.25\cdot 16}{4} + \frac{5\cdot 4}{2}\right) = 10\pi$$

y $\quad V_{hole} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 0.6^2 \cdot 2.5 \approx 2.83$

entonces $\quad V_{hub} = 10\pi - 2.83 \approx 28.6\ dm^3$

$Masa = volumen \cdot densidad = 0.0286\, m^3 \cdot 8800\, \frac{kg}{m^3} \approx 252\ kg$

3B.010

$\frac{dM}{dt} = k \cdot M \quad \Leftrightarrow$

$\frac{dM}{M} = k \cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{M} dM = k\int dt \quad \Leftrightarrow$

$ln\,|M| = kt + c \quad => \quad M = e^{kt+c}$ solución general

(Para comparar con la notación habitual, por ejemplo en el libro de texto, esta expresión se puede convertir:

$M = e^{kt+c} \quad \Leftrightarrow \quad M = e^{kt} \cdot e^{c} \quad \Leftrightarrow \quad M = c \cdot e^{kt}$

Donde e^c es una constante desconocida, todavía llamada c por simplicidad, y k puede escribirse con un signo menos. Mientras k sea desconocido, se conocerá el signo + o – cuando se conozca la constante).

Para t = 0 y M = 90 $\quad 90 = e^c \quad \Leftrightarrow \quad c = ln\,90 \approx 4.5$

Para t = 60 y M = 20:

$20 = e^{k\cdot 60+4.5} \quad \Leftrightarrow \quad ln\,20 = 60k + 4.5 \quad \Leftrightarrow$

$3 - 4.5 = 60k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{-1.5}{60} - 0.025 \quad \Leftrightarrow$

$M \approx e^{-0.025t+4.5}$ nuestra solución específica

3B.011

$\frac{dM}{dt} = k \cdot M^2$ ⇔

$\frac{dM}{M^2} = k \cdot dt$ ⇔ $\int M^{-2} dM = k \int dt$ ⇔

$-M^{-1} = kt + c_1$ ⇔ $\frac{1}{M} = -kt + c$ ⇔

$M = \frac{1}{-kt+c}$ solución general

Para t = 0 y M = 90 $90 = \frac{1}{c}$ ⇔ $c = \frac{1}{90}$

Para t = 40 y M = 20:

$20 = \frac{1}{-k \cdot 40 + \frac{1}{90}}$ ⇔ $-800k + \frac{2}{9} = 1$ ⇔

$k \approx -0.001$ =>

$M \approx \frac{1}{0.001t + 0.0111}$ nuestra solución específica

3B.012

$\frac{dM}{dt} = k \cdot M^3$ ⇔

$\frac{dM}{M^3} = k \cdot dt$ ⇔ $\int M^{-3} dM = k \int dt$ ⇔

$\frac{-M^{-2}}{2} = kt + c_1$ ⇔ $\frac{M^{-2}}{2} = -kt + c$ ⇔

$M = \left(\frac{1}{-2kt+c}\right)^{½}$ solución general

Para t = 0 y M = 90 $90 = \left(\frac{1}{c}\right)^{½} \Leftrightarrow c = \frac{1}{8100}$

Para t = 20 y M = 20:

$20 = \left(\frac{1}{-2k\cdot 20 + \frac{1}{8100}}\right)^{½} \Leftrightarrow$ $400 = \frac{1}{-40k + \frac{1}{8100}} \Leftrightarrow$

$k \approx -0.0000282$

$M \approx \left(\frac{1}{-0.0011t + 0.0001235}\right)^{½}$ nuestra solución específica

3B.013

$\frac{dM}{dt} = -km$ tiene la solución $M = c \cdot e^{-kt}$

donde $M(0) = 1 \quad y \quad M(5730) = \frac{1}{2}$

Hallazgo c $1 = c \cdot e^{-k\cdot 0} \Leftrightarrow c = 1$

Hallazgo k $\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-k\cdot 5730} \Leftrightarrow$

$ln\frac{1}{2} = -k \cdot 5730 \Leftrightarrow$

$ln\,1 - ln\,2 = -\,5730k \Leftrightarrow$

$0 - ln\,2 = -\,5730k \Leftrightarrow$

$k = \frac{ln\,2}{5730} \approx 0.00012$

Entonces $M = e^{-0.00012t}$

Ahora $0.76 = e^{-0.00012t}$ $\Leftrightarrow$

$ln\, 0.76 = -0.00012t$ $\Leftrightarrow$

$t \approx 2287$

El Hombre de Grauballe murió hace 2287 años.

3B.014

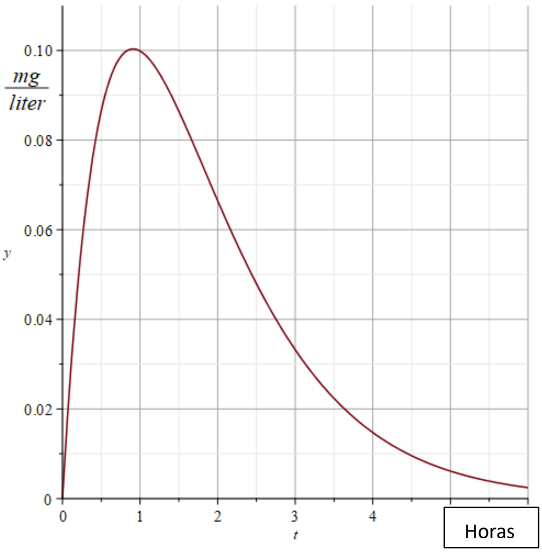
$\frac{dh}{dt} = 0.17 \cdot h$ $\Leftrightarrow$ $\frac{dh}{h} = 0.17 \cdot dt$ $\Leftrightarrow$

$\int_3^9 \frac{1}{h}\, dh = 0.17 \int dt$ $\Leftrightarrow$ $[\ln h]^9{}_3 = 0.17t$ $\Leftrightarrow$

$\frac{ln9 - ln3}{0.17} = t$ $\Leftrightarrow$ $t = 6.46\ días$

3B.015

$f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$



Lectura: Concentración máxima de aproximadamente 0,10 mg/litro después de aproximadamente 0,9 horas.

Cálculo:

$f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$ =>

$f'(t) = 0.3(1 \cdot e^{-1.1t} + t \cdot e^{-1.1t} \cdot (-1.1))$

Máx. para $0.3\left(1 \cdot e^{-1.1t} + t \cdot e^{-1.1t} \cdot (-1.1)\right) = 0$ ⇔

$e^{-1.1t} - 1.1\, t \cdot e^{-1.1t} = 0$ ⇔

$e^{-1.1t}(1 - 1.1t) = 0$ ⇔

$e^{-1.1t} = 0 \quad o \quad (1 - 1.1t) = 0$ ⇔

$\text{sin}\ solución \quad o \quad t \approx 0.909$ =>

Insertado $f(t) = 0.3 \cdot 0.909 \cdot e^{-1.1 \cdot 0.909}$ ⇔

$f(t) \approx 0.1$

Compliance.

3B.016

$a_{promedio} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3101-0}{14-0} = 221.5\ \frac{m}{s^2}$

$\frac{a_{promedio}}{g} = \frac{221.5}{9.81} \approx 22.6\ veces\ más\ grande\ que\ g\ o\ aprox.\ 23\ g$

No, los astronautas toman mucho menos. Sólo equipo.

3B.017

$\frac{dM}{dx} = 0.000369 \cdot M(15.5 - M)$

Una ecuación diferencial logística con la fórmula de solución:

$$y = \frac{m}{1+ce^{-amx}}$$

Aquí $\quad M = \frac{15.5}{1+ce^{-0.000369\cdot 15.5\cdot x}}$ =>

x = 400 y M = 13.1 =>

$$13.1 = \frac{15.5}{1+ce^{-0.000369\cdot 15.5\cdot 400}} \Leftrightarrow$$

$$13.1(1 + ce^{-2.29}) = 15.5 \Leftrightarrow$$

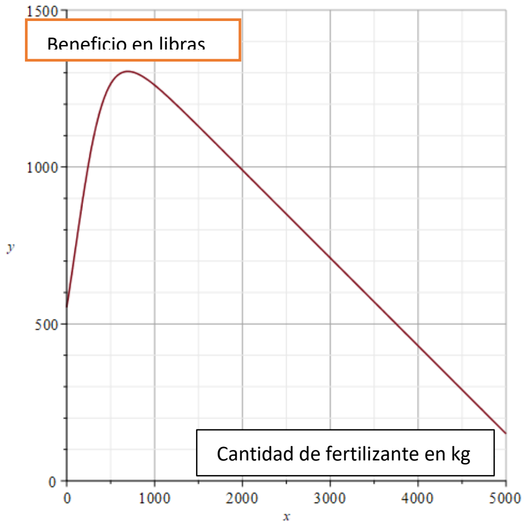
$$13.1 + 13.1 \cdot ce^{-2.29} = 15.5 \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{15.5-13.1}{13.1\cdot e^{-2.29}} = 1.805 \Rightarrow$$

$$M = \frac{15.5}{1+1.805\cdot e^{-0.00572\cdot x}}$$

Beneficio = ventas – costos => $Beneficio = M \cdot 100 - 0.28 \cdot x$

(M se inserta en la función Beneficio antes de la visualización, ya sea mediante CAS (como aquí) o, más aproximadamente, mediante el cálculo normal de coordenadas).



La ganancia es máxima de aproximadamente 1300 libras cuando se utilizan aproximadamente 700 kg de fertilizante.

3B.018

$\frac{dL}{dt} = k(100 - L)$

La longitud máxima es 100 cm

$\frac{dL}{dt} = k(100 - L) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dL}{dt} = 100k - kL \quad \Leftrightarrow$

$L = 100 + ce^{-kt}$

Encontrando c: L = 0.4 y t = 0 insertado:

$0.4 = 100 + ce^{-k\cdot 0} \quad \Leftrightarrow$

$0.4 = 100 + c \quad \Leftrightarrow$

$c = -99.6 \quad =>$

$L = 100 + (-99.6)e^{-kt}$

Encontrando k: L = 11 y t = 1 insertado:

$11 = 100 - 99.6 \cdot e^{-k\cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$-89 = -99.6 \cdot e^{-k} \quad \Leftrightarrow$

$e^{-k} = 0.89 \quad \Leftrightarrow$

$-k = ln\, 0.89 = -0.1125 \quad =>$

$L = 100 - 99.6 \cdot e^{-0.1125\cdot t}$

L = 40 => $40 = 100 - 99.6 \cdot e^{-0.1125\cdot t} \quad \Leftrightarrow$

$-60 = -99.6 \cdot e^{-0.1125\cdot t} \quad \Leftrightarrow$

$0.6024 = e^{-0.1125\cdot t} \quad \Leftrightarrow$

$$ln\ 0.6024 = -0.1125 \cdot t \qquad \Leftrightarrow$$

$$t \approx 4.5\ years$$

L = 60 => $60 = 100 - 99.6 \cdot e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$

$$0.4016 = e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$t \approx 8.1$ años

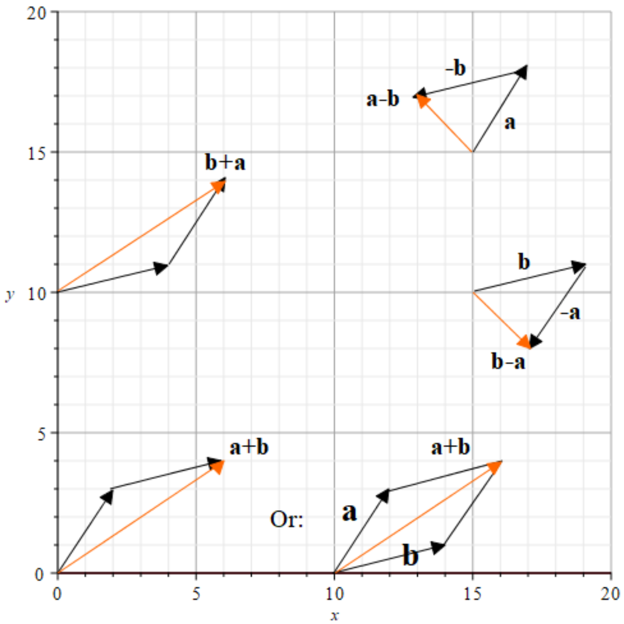
Por lo tanto el intervalo de edad es [4.4 ; 8.1] años.

Parte 4.

Sección A – soluciones propuestas

4A.001

$\boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \quad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1} \quad => \quad -\boldsymbol{a} = \binom{-2}{-3} \quad -\boldsymbol{b} = \binom{-4}{-1}$



$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \binom{2}{3} + \binom{4}{1} = \binom{6}{4}$ $\quad$ $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \binom{4}{1} + \binom{2}{3} = \binom{6}{4}$

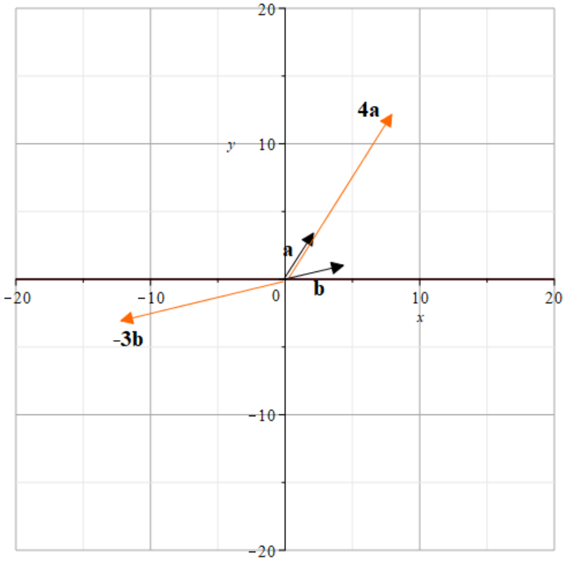
$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \binom{2}{3} - \binom{4}{1} = \binom{-2}{2}$ $\quad$ $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \binom{4}{1} - \binom{2}{3} = \binom{2}{-2}$

4A.002

$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \quad => \quad |\boldsymbol{a}| = (2^2 + 3^2)^{½} = 13^{½} = \sqrt{13}$

$\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \quad => \quad |\boldsymbol{a}| = (4^2 + 1^2)^{½} = 17^{½} = \sqrt{17}$

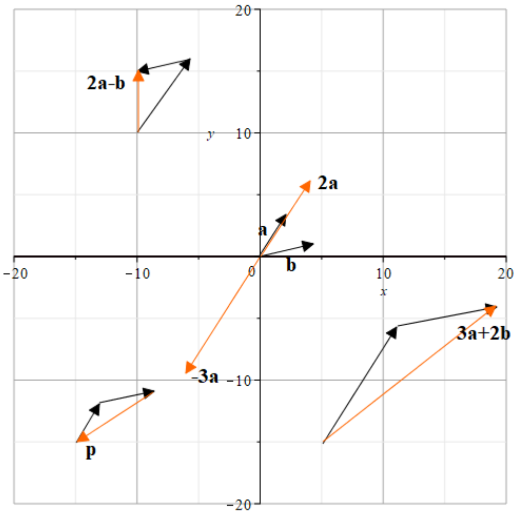
4A.003



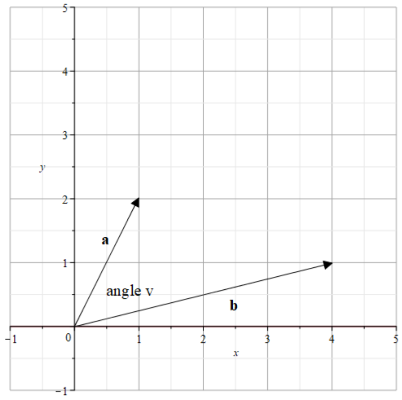
$$\boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \quad => \quad 4\boldsymbol{a} = \binom{4\cdot 2}{4\cdot 3} = \binom{8}{12}$$

$$\boldsymbol{b} = \binom{4}{1} \quad => \quad -3\boldsymbol{b} = \binom{(-3)\cdot 4}{(-3)\cdot 1} = \binom{-12}{-3}$$

4A.004



4A.005



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \binom{2}{3} \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11$$

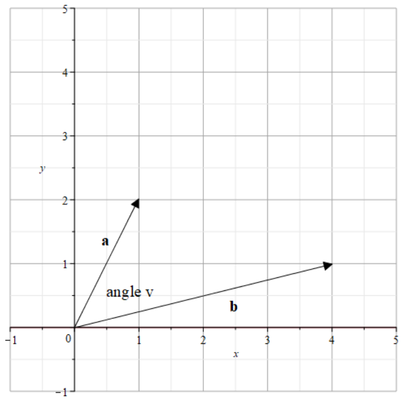
El ángulo se calcula a partir de $\cos v = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$ =>

Aquí, usando a Pitágoras para las longitudes $\cos v = \frac{11}{(2^2+3^2)^{½} \cdot (4^2+1^2)^{½}}$ ⇔

$$v = cos^{-1} \frac{11}{221^{½}} \approx 42.3°$$

4A.006

$$\boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \quad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$$



$$\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 12 = -10$$

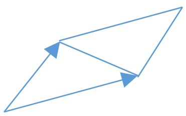
El ángulo se calcula a partir de $\quad sin\, v = \frac{det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} \qquad =>$

Aquí, usando a Pitágoras para las longitudes $\quad sin\, v = \frac{-10}{13^{½} \cdot 17^{½}} \qquad \Leftrightarrow$

$$v = sin^{-1}\frac{-10}{221^{½}} \approx 42.3°$$

4A.007

Nosotros tenemos dos vectores $\quad \boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \qquad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$



Fórmula $\quad A_{paralelogramo} = |\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$

Aqui $\quad |\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 10$

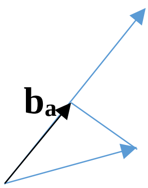
Entonces $\quad A_{paralelogramo} = 10$

y $\quad A_{triangulo} = 5$

4A.008

Nosotros tenemos dos vectores $\quad \boldsymbol{a} = \binom{4}{6} \qquad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

b$_a$



Fórmula $\quad \boldsymbol{b_a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a} \qquad =>$

Aquí $\quad \boldsymbol{b_a} = \frac{\binom{4}{6}\cdot\binom{4}{1}}{52}\cdot\binom{4}{6} \qquad \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{b_a} = \frac{22}{52}\cdot\binom{4}{6} \approx \binom{1.69}{2.54}$$

Y la fórmula de longitud	$\lvert \boldsymbol{b_a} \rvert = \frac{\lvert \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \rvert}{\lvert \boldsymbol{a} \rvert}$	=>
Aquí	$\lvert \boldsymbol{b_a} \rvert = \frac{22}{52^{½}} \approx 3.05$	

4A.009

Fórmula $\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + t\binom{r_1}{r_2}$

Aquí $\binom{x}{y} = \binom{4}{7} + t\binom{1}{2}$

La pendiente es $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1} = 2$

El eje y se corta por	$x = 0$	=>
	$4 + t = 0$	⇔
	$t = -4$	=>
	$y = 7 - 4 \cdot 2 = -1$	=>
punto de intersección	(0,-1)	

4A.010

$\binom{x}{y} = \binom{4}{7} + t\binom{1}{2}$

Formas traditionales:

pendiente $= \frac{2}{1} = 2 = a$ => $y = 2(x - 4) + 7$

⇔

$y = 2x - 8 + 7$ ⇔

$$y = 2x - 1$$

Formas vectoriales:

$\boldsymbol{r} = \binom{1}{2}$ => $\boldsymbol{n} = \binom{-2}{1}$ y punto $(x_0,y_0) = (4,7)$ =>

$-2(x-4) + 1(y-7) = 0 \quad y \quad -2x + y + 1 = 0$

4A.011

$\boldsymbol{a} = \binom{-12}{-5}$ => $\boldsymbol{u} = \dfrac{\binom{-12}{-5}}{((-12)^2+(-5)^2)^{½}} = \dfrac{\binom{-12}{-5}}{13} \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{13} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix}$$

Y el vector transversal que es **u** girado 90° en la dirección + :

$$\boldsymbol{u}_{crusado} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{-12}{13} \end{pmatrix}$$

4A.012

A(-2,0) B(6,4) C(2,-3)

Lo comprobaremos con Pitágoras, por lo que necesitamos las longitudes de los lados, que son las longitudes de los vectores **AB AC BC**

$\boldsymbol{AB} = \binom{6-(-2)}{4-0} = \binom{8}{4}$ => $|\boldsymbol{AB}|^2 = 8^2 + 4^2 = 80$

$\boldsymbol{AC} = \binom{2-(-2)}{(-3)-0} = \binom{4}{-3}$ => $|\boldsymbol{AC}|^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$

$\boldsymbol{BC} = \binom{2-6}{(-3)-4} = \binom{-4}{-7}$ => $|\boldsymbol{BC}|^2 = (-4)^2 + (-7)^2 = 55$

Pitágoras: $|\boldsymbol{AB}|^2 = |\boldsymbol{AC}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2$ =>

$80 = 25 + 55$ lo qual es cierto =>

El triángulo tiene un ángulo recto.

4A.013

A(3,1) B(1,-1) y C(-1,-2) =>

$\boldsymbol{AB} = \binom{-2}{-2}$ $\boldsymbol{AC} = \binom{-4}{-3}$ $\boldsymbol{BA} = \binom{2}{2}$ $\boldsymbol{BC} = \binom{-2}{-1}$

$\boldsymbol{CA} = \binom{4}{3}$ $\boldsymbol{CB} = \binom{2}{1}$

Fórmula $\cos v = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$

Aquí $\cos A = \frac{\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC}}{|\boldsymbol{AB}| \cdot |\boldsymbol{AC}|}$ => $\cos A = \frac{14}{8^{½} \cdot 25^{½}}$ ⇔

$A = cos^{-1} \frac{14}{8^{½} \cdot 25^{½}} \approx 8.13°$

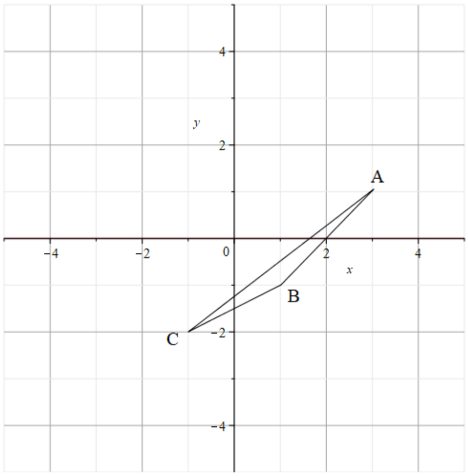
y $\cos B = \frac{\boldsymbol{BA} \cdot \boldsymbol{BC}}{|\boldsymbol{BA}| \cdot |\boldsymbol{BC}|}$ => $\cos B = \frac{-6}{8^{½} \cdot 5^{½}}$ ⇔

$B = cos^{-1} \frac{-6}{8^{½} \cdot 5^{½}} \approx 161.57°$

y $\cos C = \frac{\boldsymbol{CA} \cdot \boldsymbol{CB}}{|\boldsymbol{CA}| \cdot |\boldsymbol{CB}|}$ => $\cos C = \frac{11}{25^{½} \cdot 5^{½}}$ ⇔

$C = cos^{-1} \frac{11}{25^{½} \cdot 5^{½}} \approx 10.30°$

Control $8.13 + 161.57 + 10.30 = 180°$ Ok.



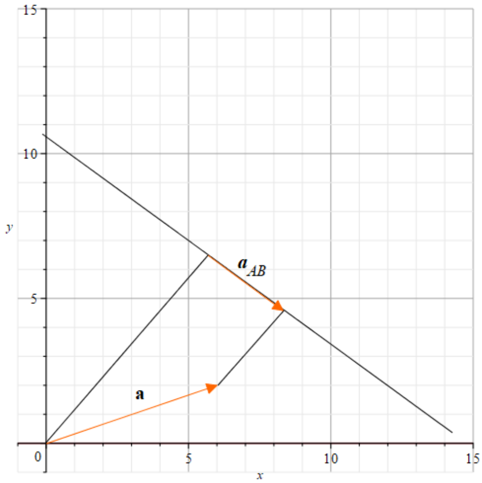
4A.014

$$\boldsymbol{AB} = \binom{7}{-5}$$

Fórmula $\quad \boldsymbol{b_a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} \cdot \boldsymbol{a}$ $\quad$ =>

Aquí $\quad \boldsymbol{a}_{AB} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{AB}}{|\boldsymbol{AB}|^2} \cdot \boldsymbol{AB} = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{-5}}{74} \cdot \binom{7}{-5}$ $\quad \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{a}_{AB} = \frac{32}{74} \cdot \binom{7}{-5} \approx \binom{3.03}{-2.16}$$



4A.015

(10,10) y $-2x + y + 1 = 0$

Fórmula $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{(a^2+b^2)^{½}}$

Aquí $d = \frac{|(-2)\cdot 10+1\cdot 10+1|}{((-2)^2+1^2)^{½}} = \frac{9}{5^{½}} \approx 4.02$

4A.016

(-12,-8) y $\binom{x}{y} = \binom{-4}{-4} + t\binom{2}{3}$ $\Leftrightarrow$

Línea en forma tradicional $y = \frac{3}{2}\left(x - (-4)\right) - 4$ $\Leftrightarrow$

$3x - 2y + 4 = 0$ =>

Distancia $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{(a^2+b^2)^{½}}$

$d = \frac{|3(-12)+(-2)(-8)+4|}{(3^2+(-2)^2)^{½}} = \frac{16}{13^{½}} \approx 4.44$

4A.017

$\boldsymbol{OP} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

Length $(5^2 + 5^2)^{½} = 50^{½}$

Ángulo $tan\ \theta = \frac{5}{5}$ => $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$

Longitud $P(50^{½}, \frac{\pi}{4})$ o $P(\sqrt{50}, \frac{\pi}{4})$

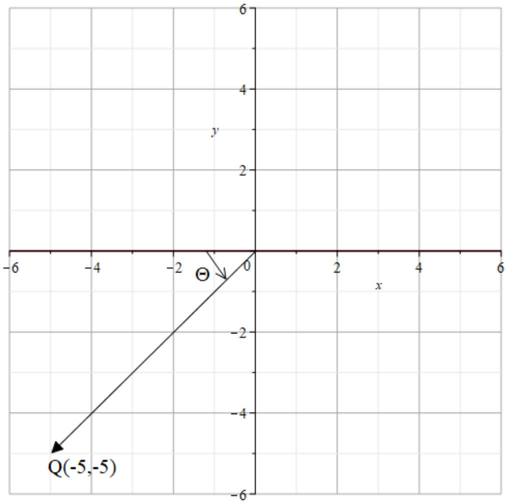
4A.018

$\boldsymbol{OQ} = -5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$

Longitud $((-5)^2 + (-5)^2)^{½} = 50^{½}$

Ángulo $\tan\theta = \frac{-5}{-5}$ => $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ ángulo en el tercer cuadrante

Ángulo entre +x y OQ es $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

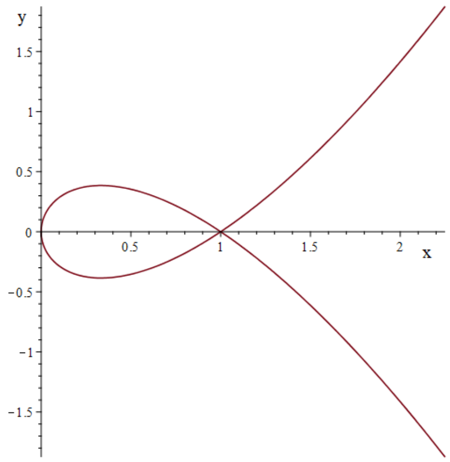


Entonces $P(50^{½}, \frac{5\pi}{4})$ o $P(\sqrt{50}, \frac{5\pi}{4})$

O en la dirección negativa $P(50^{½}, -\frac{3\pi}{4})$

4A.019

$\boldsymbol{r}(t) = \binom{x}{y} = \binom{t^2}{t^3 - t}$



En el punto doble tenemos $x_1 = x_2$ => $t_1{}^2 = t_2{}^2$

e $y_1 = y_2$ => $t_1{}^3 - t_1 = t_2{}^3 - t_2$

Dos ecuaciones con dos incógnitas. Al adivinar aparentemente tenemos las raíces

$t = 0 \quad o \quad t = 1 \quad o \quad t = -1$

Pero cocmo t_1 y t_2 son diferentes, sólo $t_1 = -t_2$ es verdadero. Por lo tanto $t = 0$ no es raíz.

Entonces, ahora que se encontró t, podríamos continuar encontrando (x,y) desde aquí, pero verifiquemos usando también la otra ecuación:

Insertamos $t_1 = -t_2$ en

$t_1{}^3 - t_1 = t_2{}^3 - t_2$ =>

$(-t_2)^3 - (-t_2) = t_2{}^3 - t_2$ ⇔

$t_2 + t_2 = 2t_2{}^3$ ⇔

$t_2 = t_2{}^3$ =>

$t_2 = (0) \quad o \quad -1 \quad o \quad 1$ => $t_1 = 1 \quad o \quad -1$

Entonces, $t_2 = \pm 1 \quad y \quad t_1 = \pm 1$

$t = -1 \quad => \quad x = (-1)^2 = 1 \quad e \quad y = (-1)^3 - (-1) = 0$

$t = 1 \quad => \quad x = 1^2 = 1 \quad e \quad y = 1^3 - 1 = 0$

Por tanto, un doble punto: (1,0)

Tangente(s) horizontal(es) para:

$\frac{dy}{dt} = 0 \quad => \quad 3t^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t \approx \pm 0.577 \quad =>$

Tangentes horizontales en puntos:

$(x_1, y_1) = (0.577^2\ ;\ 0.577^3 - 0.577) \approx (0.333\ ;\ -0.385)$

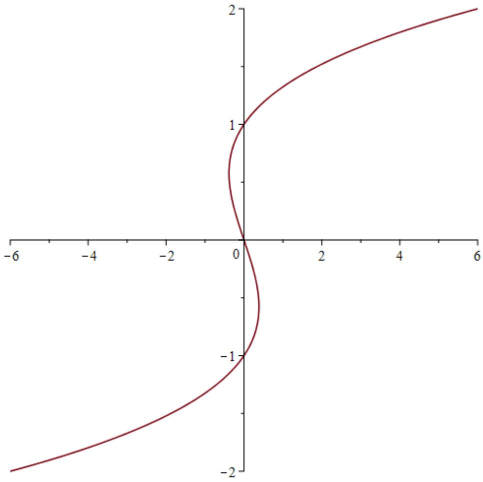
$(x_2, y_2) = ((-0.577)^2\ ;\ (-0.577)^3 - (-0.577)) \approx$
$(0.333\ ;\ 0.385)$

Tangentes verticales para: $\frac{dx}{dt} = 0 \quad => \quad 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{t} = 0 \quad =>$

Tangente vertical en punto: $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (0^2\ ;\ 0^3 - 0) = (0\ ;\ 0)$

4A.020

$\boldsymbol{r}(t) = \binom{x}{\mathrm{y}} = \binom{t^3 - t}{t}$



Doble punto para $\quad x_1 = x_2 \quad => \quad {t_1}^3 - t_1 = {t_2}^3 - t_2$

e $\quad y_1 = y_2 \quad => \quad t_1 = t_2$

Combinados tenemos $t_1 = t_2$ que no son dos parámetros diferentes, por lo tanto: No hay puntos dobles.

Tangente(s) horizontal(es) para:

$\frac{dy}{dt} = 0 \quad => \quad 1 = 0$ lo cual es falso, por lo tanto: No hay tangentes horizontales.

Tangentes verticales para:

$\frac{dx}{dt} = 0 \quad => \quad 3t^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t \approx \pm 0.577 \quad =>$

Tangente vertical en puntos:

$t = 0.707 \quad => \quad (x_1, y_1) \approx (-0.385\,;\ 0.577)$

$t = -0.707 \quad => \quad (x_2, y_2) \approx (0.385\,;\ -0.577)$

En las siguientes soluciones para problemas de geometría 3D sería bueno mostrar diagramas. Sin embargo, no es tan fácil prescindir de un programa de diseño asistido por ordenador, lo que queda fuera del alcance de este libro. Por lo tanto, las soluciones se presentan sin diagramas/figuras. Sin embargo, los bocetos de principios hechos a mano pueden resultar de ayuda.

4A.021

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ t \cdot a_3 \end{pmatrix} \qquad |\boldsymbol{a}| = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)^{½}$$

4A.022

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$$|\boldsymbol{a}| = (2^2 + 3^2 + 4^2)^{½} = 29^{½}$$

$$|\boldsymbol{b}| = (1^2 + 4^2 + (-2)^2)^{½} = 21^{½}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 3+4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = (3^2+7^2+2^2)^{½} = 62^{½}$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-4 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = (1^2+(-1)^2+6^2)^{½} = 38^{½}$

$$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & -2 \\ 2\cdot 4 & -3 \\ 2\cdot(-2) & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}| = (0^2+5^2+(-8)^2)^{½} = 89^{½}$

4A.023

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4(-10)+(-6)\cdot 2+2\cdot 26 = 0 \quad => \quad si$

4A.024

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{OP} = 6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

4A.025

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ con coordenadas opuestas $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Comprobamos por: $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4A.026

$$-2\boldsymbol{a} = -2\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-6\\-4\end{pmatrix}$$

4A.027

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}t\\t\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = 0 \quad => \quad t + 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

4A.028

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}t\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\-1\\t\end{pmatrix} = 0 \quad => \quad t^2 + 2 + 3t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3\pm1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = -1 \quad o \; -2$$

4A.029

$$\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

4A.030

$$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix}-3-2\\6-4\\4-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\5\end{pmatrix} \quad =>$$

$|\boldsymbol{PQ}| = ((-5)^2 + 2^2 + 3^2)^{½} = 54^{½}$

$$\boldsymbol{PR} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-4 \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad =>$$

$|\boldsymbol{PR}| = (1^2 + (-6)^2 + (-2)^2)^{½} = 41^{½}$

$$\boldsymbol{QR} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -2-6 \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} \quad =>$$

$|\boldsymbol{QR}| = (6^2 + (-8)^2 + (-7)^2)^{½} = 149^{½}$

$$\cos P = \frac{\boldsymbol{PQ}\cdot\boldsymbol{PR}}{|\boldsymbol{PQ}|\cdot|\boldsymbol{PR}|} = \frac{-5-12-10}{54^{½}\cdot 41^{½}} \approx -0.57 \quad => \quad P \approx 125°$$

$$\cos Q = \frac{\boldsymbol{QR}\cdot\boldsymbol{QP}}{|\boldsymbol{QR}|\cdot|\boldsymbol{QP}|} = \frac{30+16+35}{149^{½}\cdot 54^{½}} \approx 0.90 \quad => \quad Q \approx 25{,}4°$$

$$\cos R = \frac{\boldsymbol{RP}\cdot\boldsymbol{RQ}}{|\boldsymbol{RP}|\cdot|\boldsymbol{RQ}|} = \frac{6+48+14}{41^{½}\cdot 149^{½}} \approx 0.87 \quad => \quad R \approx 29.5°$$

4A.031

P(3, 4, -1) Q(-2, 6, 4) R(4, -2, -3)

$|\boldsymbol{PQ}| = ((-2-3)^2 + (6-4)^2 + (4-(-1))^2)^{½} = 54^{½}$

$|\boldsymbol{PR}| = ((4-3)^2 + (-2-4)^2 + (-3-(-1))^2)^{½} = 41^{½}$

$|\boldsymbol{QR}| = ((4-(-2))^2 + (-2-6)^2 + (-3-4)^2)^{½} = 149^{½}$

Punto medio de PQ: $\left(\frac{3-2}{2}, \frac{4+6}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 5, \frac{3}{2}\right)$

Punto medio de PR: $\left(\frac{3+4}{2}, \frac{4-2}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 1, -2\right)$

Punto medio de QR: $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6-2}{2}, \frac{4-3}{2}\right) = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$

4A.032

P(2, -1, 4) y Q(-3 , 4, 7) =>

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -1-4 \\ 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$ también podría haber sido **QP** =>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$ P insertada – también podría haber sido Q

4A.033

eje x intersecado para y = 0 y z = 0:

$y = 0 \quad => \quad 0 = -1 + t(-5) \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{5}$

$z = 0 \quad => \quad 0 = 4 + t \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{4}{3}$

Different t => No intersection

Eje y intersecado para x = 0 y z = 0:

$x = 0 \quad => \quad 0 = 2 + 5t \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{2}{5}$

$z = 0 \quad => \quad 0 = 4 + t \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{4}{3}$

Diferente t => Sin intersección

Eje z intersecado para x = 0 e y = 0:

$x = 0 \quad => \quad t = -\frac{2}{5}$

$y = 0 \quad => \quad t = -\frac{1}{5}$

Diferente t => Sin intersección

4A.034

Punto insertado en línea:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$x\!: \ 3 = -1 - 2t \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \qquad y\!: \ -1 = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 3$

$z\!: \ 7 = -3 - 4t \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{5}{2}$

Diferente t => No

4A.035

Punto insertado en línea:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$x\!: \ -3 = -1 - 2t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \qquad y\!: \ 1 = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

$z\!: \ -7 = -3 - 4t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

Mismo t => Si

4A.036

Las rectas sólo pueden cruzarse si s y t son iguales en ese punto en las tres direcciones. Encontramos s y t vía x e y – y probamos por z:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 26 \\ -11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \quad =>$$

$x = -6 - 4s$ y $x = -30 + 12t$

$y = 14 + 12s$ y $y = 26 - 6t$

Encontrar s y t:

$-6 - 4s = -30 + 12t$ y $14 + 12s = 26 - 6t$ =>

$s = 0 \quad y \quad t = 2$

Insertado en z => $z_1 = 17 \quad y \quad z_2 = 17$ mismo valor =>

Intersección en el punto donde s = 0 y t = 2 =>

Intersección punto (-6, 14, 17)

4A.037

Las rectas sólo pueden cruzarse si s y t son iguales en ese punto en las tres direcciones. Encontramos s y t vía x e y – y probamos por z:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad =>$$

$x = 2 - 2s$ y $x = 2t$

$y = 1 + s$ y $y = 0$

Encontrar s y t:

$2 - 2s = 2t$ y $1 + s = 0$ =>

$s = -1 \;\; y \;\; t = 2$

Insertado en z => $z_1 = 2 \;\; y \;\; z_2 = 7$ no el mismo valor =>

$z_1 \neq z_2$ => $\mathit{Sin\ intersección}$

4A.038

La recta y el plano son paralelos cuando **AB** ⊥ **n** (**AB** ortogonal con **n**) (un vector normal del plano) =>

$\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad => \quad \begin{pmatrix} 4 \\ t-3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 + 2t - 6 + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$t = -5$

4A.039

$\alpha\!: \;\; 4x - 8y + 6z = 2$ $\beta\!: \;\; -5x - 10y - 10z = 2$

$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ no es proporcional a $\boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$ => No paralelo

x e y son cero en el eje z => α se cruza en

$0 - 0 - 6z = 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; z = \frac{1}{3}$ => $(0, 0, \frac{1}{3})$

x e y son cero en el eje z => β se cruza en

$0 - 0 - 10z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{5}$ => $(0, 0, -\frac{1}{5})$

4A.040

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

α: $1(x - 2) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0$ =>

$x - 2 + 2y - 4 + 3z - 9 = 0$ ⇔

$x + 2y + 3z - 15 = 0$

β: $-(x + 2) - 2(y + 2) - 3(z + 3) = 0$ =>

$-x - 2 - 2y - 4 - 3z - 9 = 0$ ⇔

$x + 2y + 3z + 15 = 0$

γ: $2(x - 6) + 0(y - 1) - 4(z + 2) = 0$ =>

$2x - 12 + 0 - 4z - 8 = 0$ ⇔

$x - 2z - 10 = 0$

4A.041

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punto insertado en α $2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1$ ⇔

$1 = 1 \quad verdad$ =>

$Si, (1{,}1{,}1)\ esta\ en\ \alpha$

$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son proporcionales =>
No es normal.

El paralelismo se comprueba mediante el producto escalar:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 5 + 4 = 1 \neq 0 \quad => \quad \text{No paralelo.}$$

4A.042

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad 2t^2 + 1 + 3t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3 \pm 1}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = -1 \quad o \quad -\frac{1}{2}$$

4A.043

A(1, -1, 2) B(0, 2, 0) C(4, 2, 1)

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ dónde:

Formamos dos vectores en el plano:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-(-1) \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El producto vectorial da un vector normal:

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{n}_\alpha$ y **B** insertado: $3(x-0) - 7(y-2) - 12(z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$$3x - 7y - 12z + 14 = 0$$

Una forma inteligente de calcular el producto cruzado es "repetir los valores de x" a continuación y luego multiplicar los determinantes comenzando en el medio, luego bajo y finalmente en la parte superior:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} medio\text{:}\ \ 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 \\ bajo\text{:}\ \ (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \\ arriba\text{:}\ (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

-1 3

4A.044

D(-1, 1, -2) E(0, -2, 0) F(-4, -2, -1)

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ dónde:

Formamos dos vectores en el plano:

$$\boldsymbol{DE} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ -2-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{DF} = \begin{pmatrix} -4-(-1) \\ -2-1) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El producto vectorial da un vector normal:

$$\boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{n}_\beta$ y **E** insertado: $3(x-0) - 7(y+2) - 12(z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$3x - 7y - 14 - 12z = 0$

(0, -2, 0) insertado: $3 \cdot 0 - 7(-2) - 14 - 12 \cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$14 - 14 = 0$ verdad => Si

4A.045

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ =>

$A_{paralelogramo} = |\boldsymbol{a}\ x\ \boldsymbol{b}| = |\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}| = (3^2 + (-6)^2 + 5^2)^{½} \quad \Leftrightarrow$

$A_{paralelogramo} = \sqrt{70} \approx 8.37$ =>

(Ver la solución al problema 4A.043 sobre la técnica de cálculo del producto cruz).

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot A_{paralelogramo} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{70} \approx 4.18$$

4A.046

A(1, 1, 1)   B(1, 2, 3)   C(3, 1, 2)   =>

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{AB} \; x \; \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad =>$$

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 4^2 + (-2)^2)^{½} = \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx 2.29$$

4A.047

El ángulo entre los planos es igual al ángulo entre sus vectores normales:

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad => \quad |\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{19} \quad y \quad |\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{29}$$

Fórmula $\quad cos\ v = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$

Aquí $\quad cos\ v = \frac{19}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{29}} \quad => \quad v = cos^{-1}\left(\frac{19}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{29}}\right) \approx 36°$

4A.048

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y \quad 3x + 3y - z + 4 = 0$$

x, y e z desde la línea insertada en el plano:

$3(1+2t)+3(2+t)-(3+5t)+4=0 \quad \Leftrightarrow$

$3+6t+6+3t-3-5t+4=0 \quad \Leftrightarrow$

$t=\frac{5}{2}$ que se inserta en la línea =>

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{31}{2} \end{pmatrix}$ cual es el vector de posición =>

Punto $(6, \frac{9}{2}, \frac{31}{2})$

4A.049

P(1, 2, 3) y Q(4, 5, 6) => $\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ =>

Línea con P y **PQ** insertado $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$4x-y+2z-6=0$ => $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

El ángulo entre el vector dirección de las líneas y el vector normal del plano es:

$$cos\ v = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}|\cdot|\boldsymbol{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(3^2+3^2+3^2)^{½}\cdot(4^2+(-1)^2+2^2)^{½}} \quad \Leftrightarrow$$

$$cos\ v = \frac{15}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{21}} \quad => \quad v = cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{21}}\right) \approx 51°$$

Y el ángulo con el propio plano: 90 – 51 = 39°

4A.050

El plano β tiene el mismo vector normal que el plano α =>

$\boldsymbol{n}_\beta = \boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y punto (5, 3, 1) =>

$1(x-5) + 3(y-3) - 1(z-1) = 0$ ⇔

$\beta\text{:}\ x + 3y - z - 13 = 0$

4A.051

P(6, 0, 2) y $\alpha\text{:}\ \ 6x + 3y + 2z - 5 = 0$ =>

Fórmula $dist(P, \alpha) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{(a^2+b^2+c^2)^{½}}$ =>

Aquí $dist(P, \alpha) = \frac{|6\cdot 6+3\cdot 0+2\cdot 2-5|}{(36+9+4)^{½}} = 5$

4A.052

El ángulo entre los planos es igual al ángulo entre sus vectores normales:

$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ => $|\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{14}$ y $|\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{21}$

Fórmula $cos\ v = \frac{\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\beta}{|\boldsymbol{n}_\alpha| \cdot |\boldsymbol{n}_\beta|}$

Aquí $cos\ v = \frac{-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}$ => $v \approx 100°$ ángulo obtuso

y $u \approx 180 - 100 \approx 80°$ ángulo agudo

4A.053

$3x - 3 + 2y + 10 - 2z + 4 = 0$ y punto (3, 7, 2) =>

$dist. = \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + (-2) \cdot 2 + 11|}{(9+4+4)^{½}} = \frac{30}{\sqrt{17}} \approx 7.28$

4A.054

Control mediante: distancia = radio =>

(-9, 9, -11) with r = 12 and $2x + y + 2z = 5$ =>

$dist. = \frac{|2 \cdot (-9) + 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-11) - 5|}{(4+1+4)^{½}} = \frac{36}{3} = 12$ => Si

Y el punto de contacto se sitúa sobre una recta, con un vector director igual a un vector normal del plano, y que pasa por el centro de la esfera:

$\boldsymbol{r}_{línea} = \boldsymbol{n}_{plano} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y (-9, 9, -11) =>

Línea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

insertado en la ecuación del plano:

$2(-9 + 2t) + 1(9 + t) + 2(-11 + 2t) = 5$ ⇔

$-18 + 4t + 9 + t - 22 + 4t - 5 = 0$ ⇔

$t = 4$

insertado en la ecuación del línea:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$$ cual es el vector de posición =>

Punto (-1, 13,-3)

4A.055

La recta que pasa por (2, 1, 2) y (3, 3, 3) tiene el vector director:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formamos un vector $\mathbf{P_0P}$ desde el punto $P_0(2, 1, 2)$ de la recta, hasta el punto P(1, 1, 1)

$$\boldsymbol{P_0P} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fórmula $\quad d = \dfrac{|\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P_0P}|}{|\boldsymbol{r}|}$

Aquí $\quad d = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{(1+4+1)^{½}} = \dfrac{(4+0+4)^{½}}{(1+4+1)^{½}} = \dfrac{8^{½}}{6^{½}} \approx 1.15$

(Ver la solución al problema 4A.043 sobre la técnica de cálculo del producto cruz).

4A.056

Fórmula $\quad d = \dfrac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}$ $\qquad$ P_2 es un punto en m, P_1 es un punto en l dónde $\quad \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-(-5) \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

y $\quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_l \times \boldsymbol{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ =>

$|\boldsymbol{n}| = 14^{½} = \sqrt{14}$

y $\quad |\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}| = 6 + 9 + 6 = 21$

entonces $\quad d = \frac{21}{\sqrt{14}} \approx 5.6$

4A.057

α: $x + 3y - z - 5 = 0$ $\qquad$ β: $x + 3y - z - 10 = 0$

Elegimos un punto en α y encontramos su distancia a β

α: Elección x = 0 e y = 0 => z = -5 => (0 ,0 -5) =>

Fórmula $\quad dist(P,\alpha) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{(a^2+b^2+c^2)^{½}}$ =>

Aquí $\quad dist(P,\alpha) = \frac{|1\cdot0+3\cdot0+(-1)\cdot(-5)-10|}{(1^2+3^2+(-1)^2)^{½}} = \frac{|-5|}{11^{½}} = \frac{5}{11^{½}} \approx 1.51$

4A.058

La recta que pasa por P(1, 2, 3) y Q(4, 6, 8) tiene el vector director:

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-2 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

El ángulo entre **PQ** y $\boldsymbol{n}_{plano}$ es:

$$cos\ u = \frac{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{21}} = \frac{18}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{21}} \approx 0.555 \quad => \quad u = 56.3° \quad =>$$

v = 90 – u ≈ 33,7°

4A.059

x = 0 e y = 0 => z = 6 => C(0, 0, 6)

x = 0 e z = 0 => y = 3 => B(0, 3, 0)

y = 0 e z = 0 => x = 2 => A(2, 0, 0)

Formamos dos vectores $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$ =>

$Área = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\ x\ \boldsymbol{AC}|$ dónde $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\12\\6\end{pmatrix}$ =>

$$Área = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\ x\ \boldsymbol{AC}| = \frac{1}{2}(18^2 + 12^2 + 6^2)^{½} = \frac{504^{½}}{2} \approx 11.2$$

La proyección de Origo sobre α sigue la recta que pasa por (0, 0, 0) con un vector dirección igual a un vector normal del plano α:

$3x + 2y + z = 6 \quad => \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad => \quad l\text{:} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

Intersección donde la línea es igual al plano, entonces insertamos l en α:

$$3(3t) + 2(2t) + t = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 9t + 4t + t = 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{7}$$

Insertado en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

cual es el vector de posición del punto $(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7})$

4A.060

Determinamos un punto en la línea de intersección eligiendo

z = 0 =>

$\alpha\!: \; x + y = 0 \qquad \beta\!: \; 2x + 3y = 3$ =>

$\alpha\!: \; x = -y$ => $\beta\!: \; -2y + 3y = 3 \;\; => \;\; y = 3$ =>

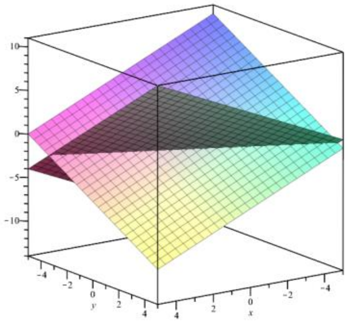
$y = 3 \quad y \quad x = -3$

Entonces, un punto en la línea de intersección es (-3, 3, 0)

El vector dirección de la línea es ortogonal a ambos planos vectores normales:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}_\alpha \times \boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ =>

Línea de intersección $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$



Control: Elección t = 1 => punto en linéa: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ =>

α: -8 + 7 + 1 = 0 β: -16 + 21 -2 = 3 Ambas son cieretas =>

La cuestión también está en α y β

4A.061

α: $3x + 12y - 4z = -6$ y $x^2 + y^2 + z^2 + 10z = -24$

Esfera $x^2 + y^2 + (z+5)^2 = -24 + 25$ =>

C(0, 0, -5) y r = 1

$$dist(C, \alpha) = \frac{|3 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + (-4) \cdot (-5) + 6|}{(9+144+16)^{½}} = 2$$

$\mathbf{n}_\alpha$ es igual $\mathbf{r}_l$ => $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Intersección donde l es igual α => l insertado en α =>

$3(3t) + 12(12t) - 4(-5 - 4t) + 6 = 0$ ⇔

$9t + 144t + 20 + 16t + 6 = 0$ ⇔

$169t + 26 = 0$ ⇔

$t = \frac{-26}{169}$ que insertado en l produce el punto de intersección/proyección:

$\left(\frac{-78}{169}, \frac{-312}{169}, \frac{99}{169}\right) \approx (-0.46, -1.85,\ 0.586)$

4A.062

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 4z - 3 = 0$ ⇔

$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9 + 9 + 4 + 3 = 25$ =>

C(3, 3, 2) y r = 5

Línea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ insertado en esfera:

$(6 + t - 3)^2 + (0 - t - 3)^2 + (2 + t - 2)^2 = 25$ ⇔

$(3 + t)^2 + (-3 - t)^2 + t^2 = 25$ ⇔

$3t^2 + 12t - 7 = 0$ ⇔

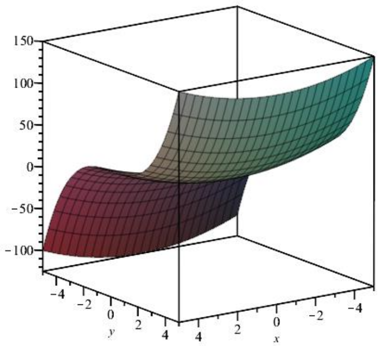
$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} \approx \frac{-12 \pm 15.1}{6}$ ⇔

$t_1 \approx 0.517 \quad y \quad t_1 \approx -4.52$ insertado en l da:

Q$_1$(6.517 ; -0.517 ; 2.517) y Q$_2$(1.48 ; 4.52 ; -2.52)

4A.063

$z = x^2 + y^3$



Fórmula del plano $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Necesitamos un punto y un vector normal:

El punto está dado (0, 5, 125)

El vector normal se encuentra mediante el producto cruzado de dos vectores tangentes. Los vectores tangentes se encuentran mediante las derivadas (pendientes):

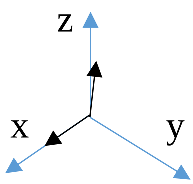
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

En nuestro punto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2 \cdot 0 = 0 \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 = 3 \cdot 5^2 = 75$$

que tiene los dos vectores de dirección:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}0\\1\\75\end{pmatrix} \qquad => $$



$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-75\\1\end{pmatrix}$$ que es nuestro vector normal.

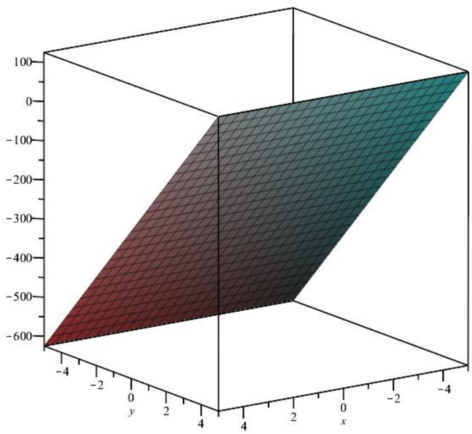
Punto y vector normal insertados en la fórmula de un plano:

$$0(x-0) - 75(y-5) + 1(z-125) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$-75y + 375 + z - 125 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

O resuelto para z (= f(x,y)), que es más fácil si hacemos un boceto:

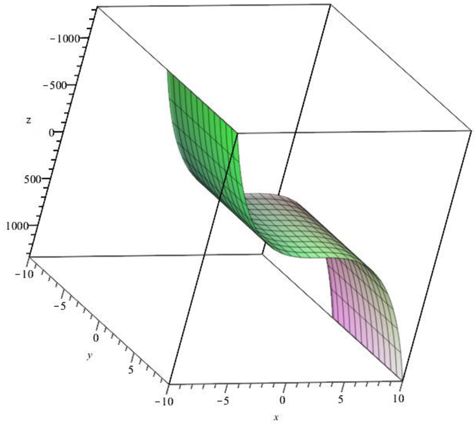
$$z = 75y - 250$$



Observamos correspondencia con la figura de la función.

4A.064

$z = \frac{4}{3}x^3 + y - x - y^{½} \quad e \quad y \geq 0$



Fórmula de un plano $\quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Necesitamos un punto y un vector normal:

El punto está dado (9, 4, 965)

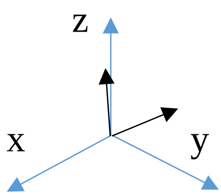
El vector normal se encuentra mediante el producto cruzado de dos vectores tangentes. Los vectores tangentes se encuentran mediante las derivadas (pendientes):

En nuestro punto: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2 - 1 = 4 \cdot 9^2 - 1 = 323$

y $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}y^{-½} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4^{-½} = \frac{3}{4}$

que tiene los dos vectores de dirección:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 323 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad =>$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 323 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -323 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$ que es nuestro vector normal.

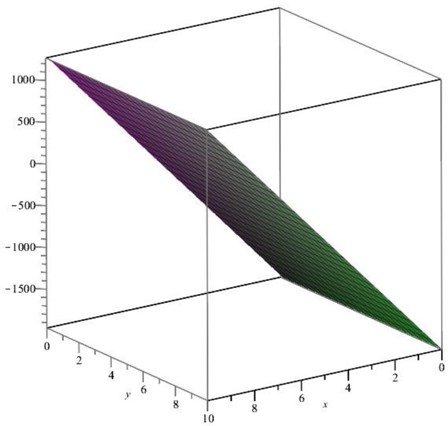
Punto y vector normal insertados en la fórmula de un plano:

$$-323(x-9) - \frac{3}{4}(y-4) + 1(z-965) = 0$$

Que puede reducirse. Sin embargo, escrito de esta manera, podemos leer el punto real y el vector normal utilizado.

O resuelto para z (= f(x,y)), que es más fácil si hacemos un boceto:

$$z = -1945 + 323x + \frac{3y}{4}$$

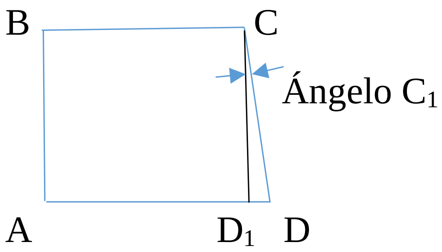


Observamos correspondencia con la figura de la función.

Parte 4.

Sección B – soluciones propuestas

4B.01



Pitágoras:

$$14^2 + |DD_1|^2 = 14.1^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$|DD_1| = (198.81 - 196)^{½} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AD| = 14 + 1.676 \approx 15.68\, m$$

$$tan\, C_1 = \frac{1.676}{14} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 6.83° \quad \Leftrightarrow \quad C = 90° + 6.83° \approx 96.83°$$

$$tan\, D = \frac{14}{1.676} \quad \Leftrightarrow \quad D \approx 83.17°$$

Controlar: A + B + C + D = 90 + 90 + 96.83 + 83.17 = 360° Ok.

4B.02

Fórmula $\quad \cos v = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$

Aqui numerador $\quad \binom{0}{4000} \cdot \binom{800}{5} = 0 + 20\,000 = 20\,000$

Aqui denominador $\quad (0^2 + 4000^2)^{½} \cdot (800^2 + 5^2)^{½} =$

$3\,200\,062$

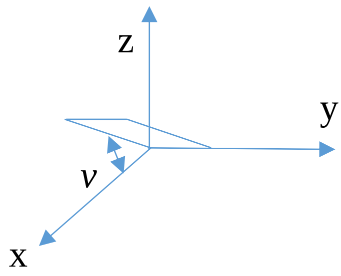
Conjunto $\quad \cos v = \frac{20\,000}{3\,200\,062} \quad => \quad v \approx 89.64°$

4B.03

Un rectángulo es un paralelogramo especial, entonces:

$$Área = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left(4^2 + 0^2 + (-4)^2\right)^{½} \quad \Leftrightarrow$$

$$\color{red}{Área \approx 5.66\, m^2}$$



Fórmula $\quad sin\, v = \dfrac{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$

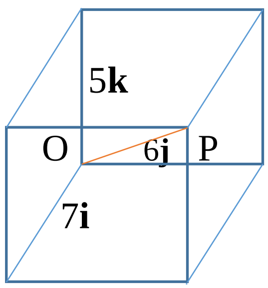
Aquí **a** es el vector base **i** en la dirección x horizontal y **b** está en la dirección de la escalera.

Numerador $\quad \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left((-4)^2\right)^{½} = 4$

Denominador $\quad (1^2)^{½} \cdot (4^2+4^2)^{½} = 32^{½}$

Conjunta $\quad sin\, v = \dfrac{4}{32^{½}} \quad => \quad v = \color{red}{45°}$

4B.04



Diagonal = **OP**

ángulo α está entre 7**i** y **OP**

ángulo β está entre 6**j** y **OP**

ángulo γ esta entre 5**k** y **OP**

$$\boldsymbol{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad => \quad |\boldsymbol{OP}| = (7^2 + 6^2 + 5^2)^{½} \approx 10.5$$

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{OP}|\cdot|\boldsymbol{i}|} = \frac{7}{10.5} \quad => \quad \alpha \approx 48.2°$$

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{OP}|\cdot|\boldsymbol{j}|} = \frac{6}{10.5} \quad => \quad \beta \approx 55.2°$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{OP}|\cdot|\boldsymbol{k}|} = \frac{5}{10.5} \quad => \quad \gamma \approx 61.6°$$

4B.05

Ferrocarril ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Camino ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

En el cruce $\begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad =>$

x e y $\quad 90 + 3s = 60 - 2t \quad y \quad 90 + 3s = 70 + 4t \quad =>$

$$t = -\frac{30}{2} - \frac{3}{2}s \qquad y \quad t = \frac{20}{4} + \frac{3}{4}s \qquad =>$$

$$-\frac{30}{2} - \frac{3}{2}s = \frac{20}{4} + \frac{3}{4}s \qquad \Leftrightarrow$$

$$s = -\frac{80}{9} \quad => \quad t = -\frac{5}{3}$$

Insertado para encontrar las coordenadas x e y:

Ferrocarril $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \end{pmatrix} - \frac{80}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{190}{3} \\ \frac{190}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 63.3 \\ 63.3 \end{pmatrix}$

O camino $\binom{x}{y} = \binom{60}{70} - \frac{5}{3}\binom{-2}{4} = \begin{pmatrix} \frac{190}{3} \\ \frac{190}{3} \end{pmatrix} \approx \binom{63.3}{63.3}$ Cumplimiento

El ferrocarril y el camino se cruzarán en (x, y) ≈ (63.3 ; 63.3)

$$dist.(ferrocarril, camino) = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

Donde P_1 es un punto de la vía férrea y P_2 es un punto de la carretera, mientras que **n** es un vector normal tanto de la vía férrea como de la carretera.

$$\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 60-90 \\ 70-90 \\ 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 \; x \; \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.3 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$$dist.(f.., c..) = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.3 \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{(0.3^2 + (-0.3)^2 + 18^2)^{½}} = \frac{|-9+6-90|}{18} \quad =>$$

$$dist.(ferrocarril, camino) \approx 5.17 \; m$$

4B.06

Ferrocarril ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ h \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Camino ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

En el cruce $\begin{pmatrix}90\\90\\h\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\70\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\4\\0.1\end{pmatrix}$ =>

x e y $\quad 90+3s=60-2t \quad y \quad 90+3s=70+4t$ =>

$$t=-\frac{30}{2}-\frac{3}{2}s \qquad y \qquad t=\frac{20}{4}+\frac{3}{4}s$$ =>

$$-\frac{30}{2}-\frac{3}{2}s=\frac{20}{4}+\frac{3}{4}s$$ ⇔

$$s=-\frac{80}{9} \quad => \quad t=-\frac{5}{3}$$

Insertado para encontrar las coordenadas x e y:

Ferrocarril $\binom{x}{y}=\binom{90}{90}-\frac{80}{9}\binom{3}{3}=\begin{pmatrix}\frac{190}{3}\\\frac{190}{3}\end{pmatrix}\approx\binom{63.3}{63.3}$

O camino $\binom{x}{y}=\binom{60}{70}-\frac{5}{3}\binom{-2}{4}=\begin{pmatrix}\frac{190}{3}\\\frac{190}{3}\end{pmatrix}\approx\binom{63.3}{63.3}$ Cumplimiento

El ferrocarril y el camino se cruzarán en (x, y) ≈ (63.3 ; 63.3)

$$dist.(ferrocarril, camino)=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

Donde P_1 es un punto de la vía férrea y P_2 es un punto de la carretera, mientras que **n** es un vector normal tanto de la vía férrea como de la carretera.

$$\boldsymbol{P_1P_2}=\begin{pmatrix}60-90\\70-90\\3-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\-20\\3-h\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_1\ x\ \boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}-2\\4\\0.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3\\-0.3\\18\end{pmatrix}$$ =>

$$dist.(ferrocarril, camino) = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|} = 5.5 \qquad =>$$

$$\frac{|\begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.3 \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ 3-h \end{pmatrix}|}{(0.3^2+(-0.3)^2+18^2)^{½}} = \frac{|-9+6+54-18h|}{18} = \frac{|51-18h|}{18} = 5.5 \qquad \Leftrightarrow$$

$$|51 - 18h| = 99 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(h = \frac{99-51}{-18} \approx -2.67) \quad or \quad h = \frac{99+51}{18} \approx 8.33$$

Dado que el ferrocarril pasa por encima de la carretera h es 8.33

4B.07

Plano $\quad x + 0 \cdot y - \frac{3}{4}z = 0 \quad => \quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Linéa $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

En la intersección la recta se inserta en el plano:

$$2 - \frac{3}{4}(1 + t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + t) = (-2)(-\frac{4}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{5}{3}$$

t insertado en línea $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

Así, la intersección en el punto $(2, 5, \frac{8}{3})$

Ángulo entre línea y plano. $\quad \cos u = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{n}|}$

Donde un vector normal del plano horizontal es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ =>

$$\cos u = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = 90°$$

Ángulo entre dos planos $\cos v = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$

Aquí $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_{roof} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

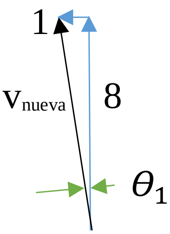
Y un vector normal del plano horizontal es

$$\boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\cos v = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{(1^2 + (-\frac{3}{4})^2)^{½} \cdot (1^2)^{½}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$$v = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53°$$

4B.08



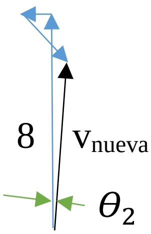
Se utilizan vectores de velocidad.

Pitágoras: $v = (8^2 + 1^2)^{½} \approx 8.06 \frac{m}{s}$

Dirección: $tan\ \theta_1 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \theta_1 \approx 7.13°$

La dirección del barco se desvía 7,13° hacia el oeste y la nueva velocidad es $8.06\,\frac{m}{s}$

Se produce viento: $\binom{0}{8} + \binom{-1}{0} + \binom{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \approx \binom{0.41}{6.59}$



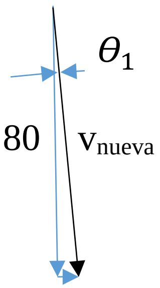
Velocidad = longitude del vector

$$v = (0.41^2 + 6.59^2)^{½} \approx 6.6\,\frac{m}{s}$$

Direction $\cos\theta_2 = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\binom{0}{8}\cdot\binom{0.41}{6.59}}{8\cdot 6.6} = \frac{52.72}{52.8} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = 3.15°$

La dirección del barco se desvía 3,15° hacia el este, y el nueva velocidad es $6.6\,\frac{m}{s}$

4B.09



Se utilizan vectores de velocidad.

Pitágoras: $v = (80^2 + 4^2)^{½} \approx 80.1\,\frac{m}{s}$

Dirección: $tan\,\theta_1 = \frac{4}{80} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 \approx 2.86°$

La dirección del avión se desvía 2.86° hacia el este y la nueva velocidad es $80.1\,\frac{m}{s}$

Cambios de viento:

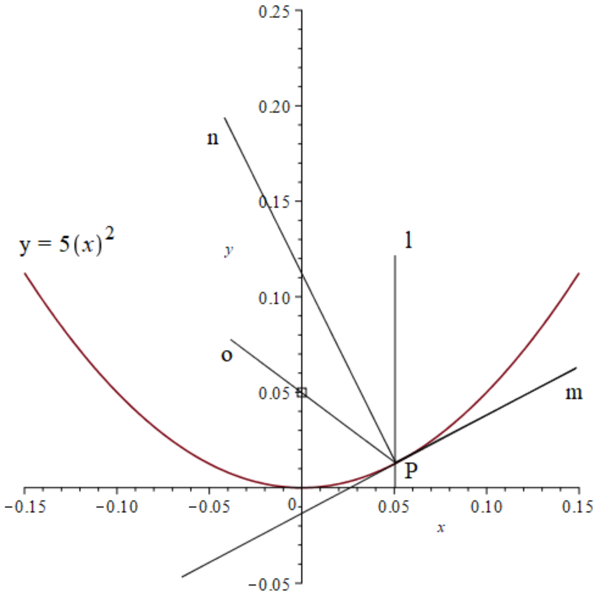
Horizontalmente el avión seguirá estando desviado 2,86° hacia el este, - y hacia arriba:

Pitágoras: $v = (80.1^2 + 1^2)^{½} \approx 80.11\,\frac{m}{s}$

Dirección: $\tan\theta_{arriba} = \frac{1}{80.11} \Leftrightarrow \theta_{arriba} \approx 0.72°$

$60\ s \cdot 1\,\frac{m}{s} = 60\ metros$

4B.10



Parábola y = $5x^2$

Elección x = 0.05 => y = 0.0125 => P(0.05 ; 0.0125)

Este punto P está en la parábola y también en la recta l: x = 0.05

La tangente de la parábola, en este punto, es:

$y = ax + b$ dónde $a = \frac{dy}{dx} = 10x = 10 \cdot 0.05 = 0.5$ =>

$0.0125 = 0.5 \cdot 0.05 + b$ ⇔ $b = -0.0125$ =>

$y = 0.5x - 0.0125$ llamada recta tangente m

El ángulo entre m y l:

m tiene el vector de dirección $\binom{1}{0.5}$ y l: $\binom{0}{1}$ =>

ángulo $cos\ v = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{l}|} = \frac{\binom{1}{0.5} \cdot \binom{0}{1}}{1.25^{½} \cdot 1^{½}} = \frac{0.5}{1.25^{½}}$ ⇔ $v \approx 63.4°$

Por lo tanto, la línea normal n forma un ángulo de 90 – 63,4 ≈ 26,6° con la línea l, que es el ángulo de incidencia del haz de luz. Por lo tanto, el ángulo entre la línea n y la línea o también es 26,6° =>
El ángulo entre la línea o y el eje x se convierte en

$90 - 26.6 - 26.6 \approx 36.8°$ =>
$Pendiente\ de\ la\ línea\ o = -\tan 36.8° \approx -0.748$ =>

Ecuació de la línea o $y = ax + b$

Aquí $0.0125 = -0.748 \cdot 0.05 + b$ =>

$b = 0.05$ =>

Dado que b es el valor de y del punto donde la línea o cruza el eje y, también es el punto focal de la parábola: (0 , 0.05)

Parte 5.

Soluciones propuestas

5.01

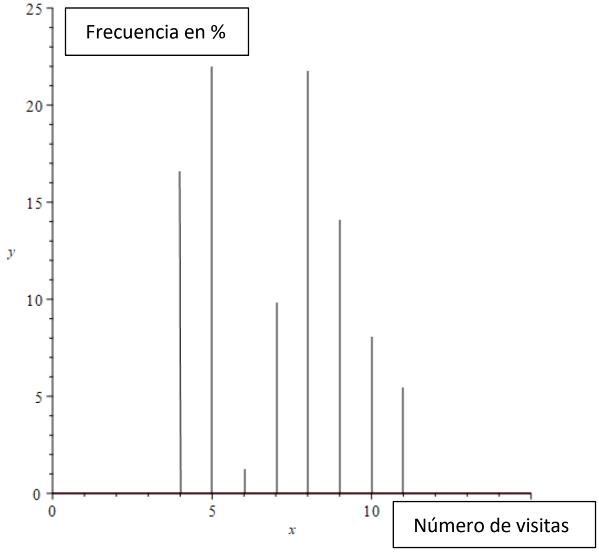
Observación más grande = 6   Observación más pequeña = 1

1.cuartil = 3   2.cuartil = 4   3.cuartil = 5

La mediana = 2.cuartil = 4

5.02

Observación. Número de visitas	Número de personas	Frecuencia, f De 1	Frecuencia De 100, es decir, en %	Frecuencia acumulada en % Frecuencias resumidas
4	12	0.167	16.7	16.7
5	16	0.222	22.2	38.8
6	1	0.014	1.4	40.2
7	7	0.097	9.7	49.9
8	16	0.222	22.2	72.1
9	10	0.139	13.9	86
10	6	0.083	8.3	94.3
11	4	0.056	5.6	100
Total:	*72*	*1*	*100 %*	*1*



$$Valor\ medio = \frac{4\cdot12+5\cdot16+6\cdot1+7\cdot7+8\cdot16+9\cdot10+10\cdot6+11\cdot4}{72} \approx 7.03$$

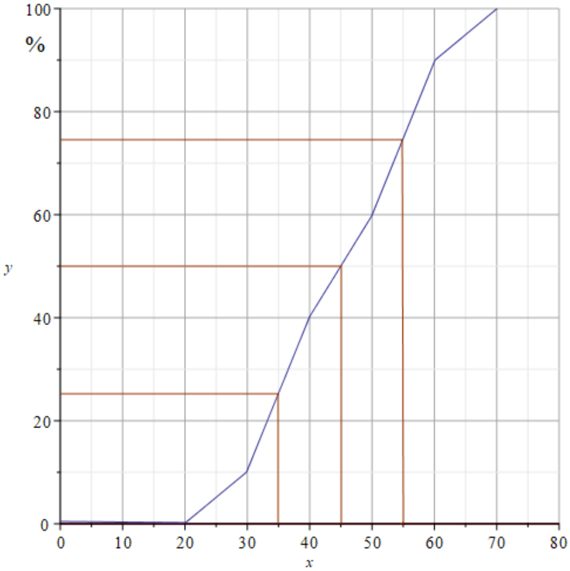
Fórmula $\quad Var. = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2$

Aquí $\quad Var. =$

$$0.167(4-7.03)^2 + 0.222(5-7.03)^2$$
$$+0.014(6-7.03)^2 + 0.097(7-7.03)^2$$
$$+0.222(8-7.03)^2 + 0.139(9-7.03)^2$$
$$+0.083(10-7.03)^2 + 0.056(11-7.03)^2 \approx$$
$$4.8 \qquad =>$$

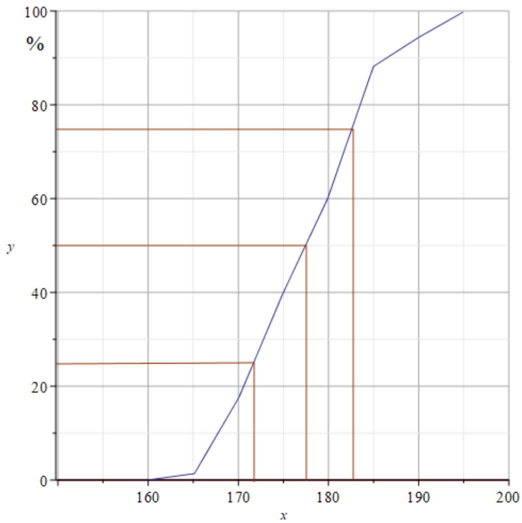
Desviación Estándar: $\quad \sigma = \sqrt{Var.} = \sqrt{4.8} \approx 2.2$

5.03



El conjunto cuartil: [35 ; 45 ; 55]

5.04



El conjunto cuartil: [172 ; 178 ; 183]

El cuartil del 90% es aprox. 187 cm, lo que significa que el 90% de los niños miden 187 cm o menos.

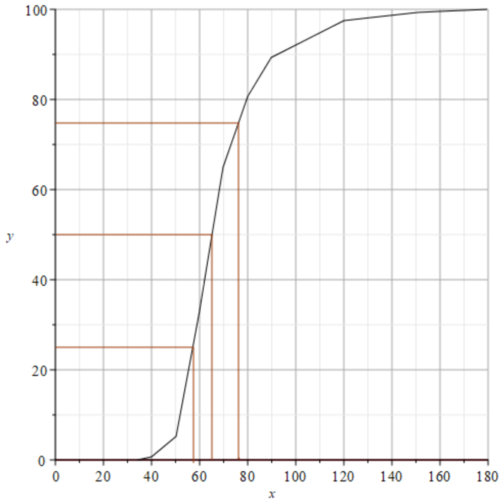
175 cm lee 40% y 180 cm lee 60% =>

6 personas es 20% =>

El 100% son 30 personas.

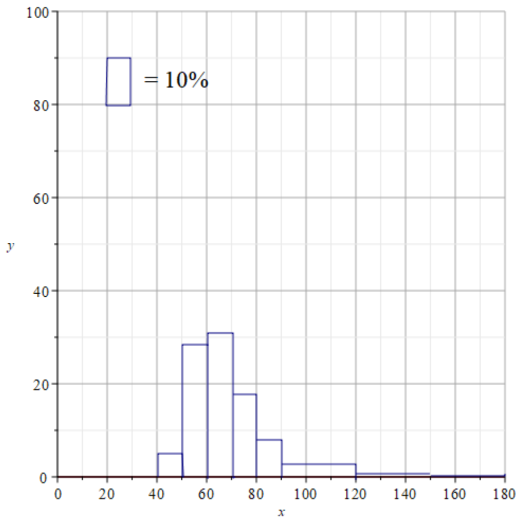
5.05

Observación. tiempo en minutos	Número de personas terminadas. (Acumulativo)	Frecuencia acumulada en % Frecuencias resumidas	Frecuencia en %
35-40	7	0.14	0.14
40-50	276	5.52	5.38
50-60	1669	33.38	27.86
60-70	3210	64.2	30.82
70-80	4093	81.86	17.66
80-90	4492	89.84	7.98
90-120	4896	97.92	8.08
120-150	4974	99.48	1.56
150-180	5000	100	0.52



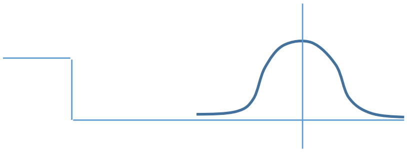
El conjunto cuartil: [58 ; 65 ; 76]

Histograma:

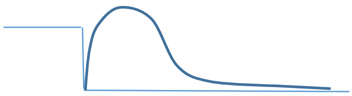


5.06

Q_1 tendrá una distributión normal:



Q_2 no tendrá una distribución normal, ya que hay un valor "de corte" en la pared donde x = 0, pero no es así para valores de x mayores.



5.07

$$frecuencia = \frac{15}{120} = 0.125 = 12.5\%$$

La probabilidad es 15 sobre 120 =>

$$probabilidad = \frac{15}{120} = 0.125 = 12.5\%$$

Dado que las dos respuestas son independientes/no están relacionadas, la probabilidad será de 0,125 para cada una.

Conjunta: $0.125 \cdot 0.125 = 0.0156 = 1.56\%$

5.08

$2 \cdot 3 \cdot 4 =$ 24 combinaciones

5.09

CAS: Los datos de "año" se ingresan de 0 a 100. Los datos correspondientes a la concentración "conc." son ingresados. Solicitamos una regresión exponencial como:
ExpReg(year, conc.). Enter

Y ceder por ejemplo: $y = 365.12 \cdot 1.0064^x$

que en nuestro caso significa: $conc. = 365.12 \cdot 1.0064^{año}$

donde x = año está en el intervalo [0;100]

En el programa utilizado por el autor, el factor de confiabilidad se dio como: $R^2 = 0{,}99766$ lo cual está bien. Por tanto, la estimación de una función exponencial está bien.

5.10

El caso es "*Ambos y*", es decir, multiplicación: 6 · 6 · 6 = 216 posibilidades

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles} = \frac{1}{6}$$

El caso es "*Ambos y*", es decir, multiplicación:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 2.78\%$$

5.11

Cada dado tiene seis caras con 1, 2, 3, 4, 5, 6 puntos.

El caso es "*Cualquira o*", es decir, más: 6 + 6 + 6 = 18 puntos.

$$probabilidad\ en\ una\ tirada = \frac{1}{6}$$

El caso es "*Cualquira o*", es decir, más: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \approx 50\%$

5.12

El caso/la elección es *cualquier orden*, *sin repetición*, donde n = 6 y r = 3

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 120\ possibilidades$$

Liz, Peter y Ann es una posibilidad (el resultado favorable), es decir:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles} = \frac{1}{120} \approx 0.83\%$$

5.13

El caso/la elección *no es un orden, sin repetición* donde n = 6 y r = 3

$$K = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20\ possibilidades$$

Liz/Peter/Ann u otras órdenes son una posibilidad, es decir:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles} = \frac{1}{20} \approx 5\%$$

5.14

El caso es Cualquier orden, con repetición, es decir, "*Ambos y*" =>

$24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24^2 \cdot 10^5 =$ 57 600 000 possibilidades

AB 12 345 is the only favorable outcome =>

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles} = \frac{1}{57\,600\,000}$$

5.15

El caso *no es orden, con repetición*. =>

$$\frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!} = \frac{(6-1+3)!}{3!\cdot(6-1)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56\ possibilidades$$

Nosotras nombramos los autos A1, A2, A3, B, C, D.

A1, A2, A3, B se puede combinar de 4 maneras.

A1, A2, A3, C se puede combinar de 4 maneras.

A1, A2, A3, D se puede combinar de 4 maneras.

El caso del número de resultados favorables de los numeradores es "*Cualquira o*", es decir, suma:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles} = \frac{4+4+4}{56} = \frac{12}{56} \approx 21.4\%$$

5.16

El orden no importa por lo que el caso es *sin orden, sin repetición*.

debemos calcular $probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles}$

The numerator shows how many ways we may have 3 out of 5 A´s: =>

Numerador $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10\ resultados\ favorables$

Del total, cuál es el denominador:

Denominador $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6\cdot 9!} =$

$220\ resutados\ favorables\ en\ total$

Fracción $$probabilidad = \frac{10}{220} = \frac{1}{22} \approx 4.55\%$$

5.17 (5.16 continuado)

El orden no importa por lo que el caso es *sin orden, sin repetición*.

Quedan A, A, A, A, B, B, C, C, C es decir 9. =>

Denominador $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{9!}{2!\cdot(9-2)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 7!} = 36\, resultados\ possibles$

Numerador para B $K_B = \frac{2!}{1!\cdot(2-1)!} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2$

Numerador para C $K_C = \frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3$

These must be combined as *"Both, and"* i.e. multiplication =>

Fracción $probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ possibles} = \frac{K_B \cdot K_C}{K} = \frac{2\cdot 3}{36} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$

5.18

El caso es una muestra distribuida binomial. =>

$$\left[p^* - 2\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}} \;\; ; \;\; p^* + 2\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}} \right]$$

Aquí n = 1017 y la estimación puntual $p^* = \frac{408}{1017} \approx 0.401$ =>

$$\left[0.401 - 2\sqrt{\frac{0.401\cdot(1-0.401)}{1017}} \;\; ; \;\; 0.401 + 2\sqrt{\frac{0.401\cdot(1-0.401)}{1017}} \right] = [0.37\,;0.43]$$

Por lo tanto, existe una probabilidad del 95% de que entre el 37% y el 43% de todos los votantes voten por ese partido en particular.

5.19

El caso es una muestra distribuida binomial. Y calculamos el ca. Intervalo de confianza del 99%:

$$\left[p^* - 3\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}} \ ; \ p^* + 3\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}} \right]$$

Aquí n = 1500 y la estimación puntual $p^* = \frac{51}{1500} \approx 0.034$ =>

$$\left[0.034 - 3\sqrt{\frac{0.034\cdot(1-0.034)}{1500}} \ ; \ 0.034 + 3\sqrt{\frac{0.034\cdot(1-0.034)}{1500}} \right] = [0.02 \ ; 0.048]$$

Por tanto, existe una probabilidad del 95% de que entre el 2% y el 4,8% de las 30.000 personas mayores de 10 años quisieran montar en bicicleta. El número de personas es:

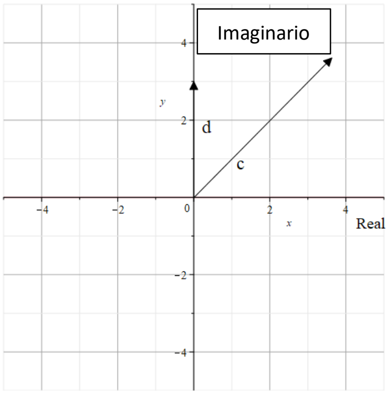
0,02·30 000 = 600 y 0,048·30 000 = 1440 corredores

Rentabilidad del 25%: entre 150 y 360 personas que con una probabilidad del 99% asistirán a la nueva escuela de equitación.

Números complejos

5.20

$c = (5, \frac{\pi}{4})$ y $d = (3, \frac{\pi}{2})$ =>



Polar

$c \cdot d = 5 \cdot 3_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} = 15_{\frac{3\pi}{4}}$ $\qquad \frac{c}{d} = \left(\frac{5}{3}\right)_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{5}{3}\right)_{-\frac{\pi}{4}}$

Rectangular (como vector)

d $\qquad d = 3I$

y c $\qquad 5^2 = x^2 + y^2$ angulo = 45° => x = y =>

$5^2 = 2x^2$ =>

$x \approx 3.56$ =>

$c \approx 3.56 + 3.56 \cdot I$

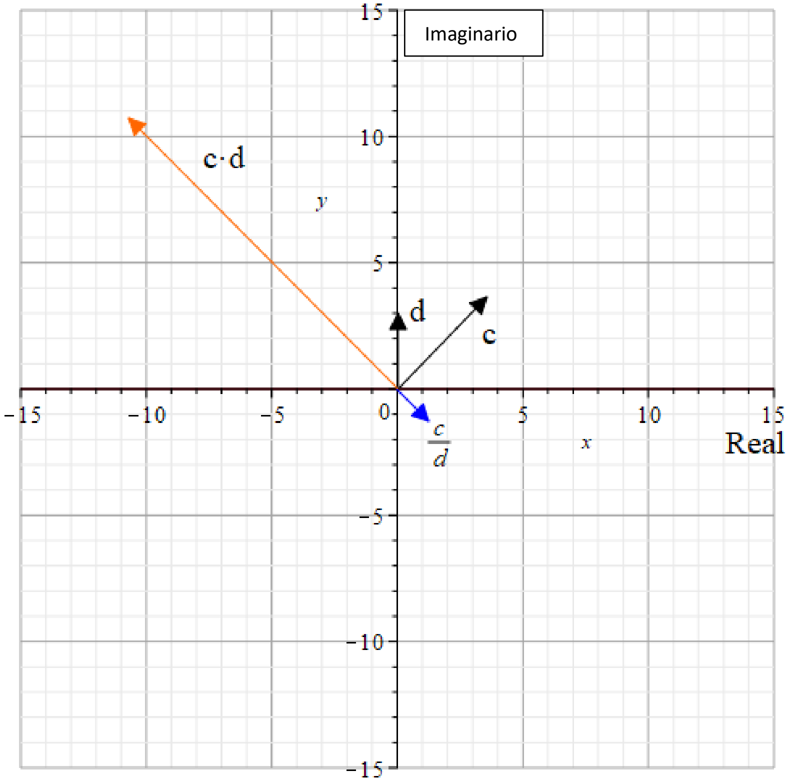
$c \cdot d = (3.56 + 3.56I) \cdot (3I)$ ⇔

$c \cdot d = 10.7I + 10.7I^2$ ⇔

$c \cdot d \approx -10.7 + 10.7I$

$\frac{c}{d} = \frac{3.56+3.56I}{3I} = \frac{(3.56+3.56I)(3I)}{3I(3I)} = \frac{10.7I+10.7I^2}{9I^2} = \frac{10.7I-10.7}{-9}$ ⇔

$\frac{c}{d} \approx 1.19 - 1.19I$



5.21

Rectangular (como vector)

$a = 3 + 4I \quad y \quad b = -2 + 5I$ =>

$a \cdot b = (3 + 4I) \cdot (-2 + 5I)$ ⇔

$a \cdot b = -6 + 15I - 8I + 20I^2$ ⇔

$a \cdot b = -6 + 7I - 20$ ⇔

$a \cdot b \approx -26 + 7I$

$\frac{a}{b} = \frac{3+4I}{-2+5I} = \frac{(3+4I)(-2-5I)}{(-2+5I)(-2-5I)} = \frac{-6-15I-8I-20I^2}{4-(25\cdot(-1))} = \frac{-6-23I+20}{29} \Leftrightarrow$

$\frac{a}{b} \approx 0.483 - 0.793I$

Polar

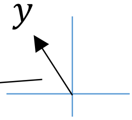
$mód_a = (3^2 + 4^2)^{½} = 5 \quad y$

$arg_a = tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53.1°$ =>

$a = (5\,; 53.1°) \quad or \quad 5_{53.1°}$

$mód_b = ((-2)^2 + 5^2)^{½} = 29^{½} \approx 5.39 \quad y$

$ángulo\ con\ -x = tan^{-1}\frac{5}{-2} \approx -68.2°$



$arg_b(ángulo\ con\ +x) = 180° - 68.2° = 111.8°$ =>

$b = (5.39\,; 111.8°) \quad o \quad 5.39_{111.8°}$

Entonces

$a \cdot b = (5 \cdot 5.39)_{53.1+111.8} \approx 26.9_{164.9°}$

$\frac{a}{b} = \left(\frac{5}{5.39}\right)_{53.1-111.8} \approx 0.929_{-58.8°}$

5.22

Rectangular (como vector)

$a = 3 + I \quad y \quad b = -2 - 2I$ =>

$a \cdot b = (3 + I) \cdot (-2 - 2I)$ $\Leftrightarrow$

$a \cdot b = -6 - 6I - 2I - 2I^2$ $\Leftrightarrow$

$a \cdot b \approx -4 - 8I$

$\frac{a}{b} = \frac{3+I}{-2-2I} = \frac{(3+I)(-2+2I)}{(-2-2I)(-2+2I)} = \frac{-6+6I-2I-2I^2}{4-4I+4I-4I^2} = \frac{-8+4I}{8}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{a}{b} \approx -1 + \frac{1}{2}I$

Polar

$mód_a = (3^2 + 1^2)^{½} = 10^{½} \approx 3.16$ *y*

$arg_a = tan^{-1}\frac{1}{3} \approx 18.4°$ =>

$a \approx 3.16\angle 18.4°$

$mód_b = ((-2)^2 + (-2)^2)^{½} = 8^{½} \approx 2.83$ *y*

$angulo\ con\ -x = tan^{-1}\frac{5}{-2} \approx -68.2°$

$arg_b = 180° + tan\frac{2}{2} = 225°$ =>

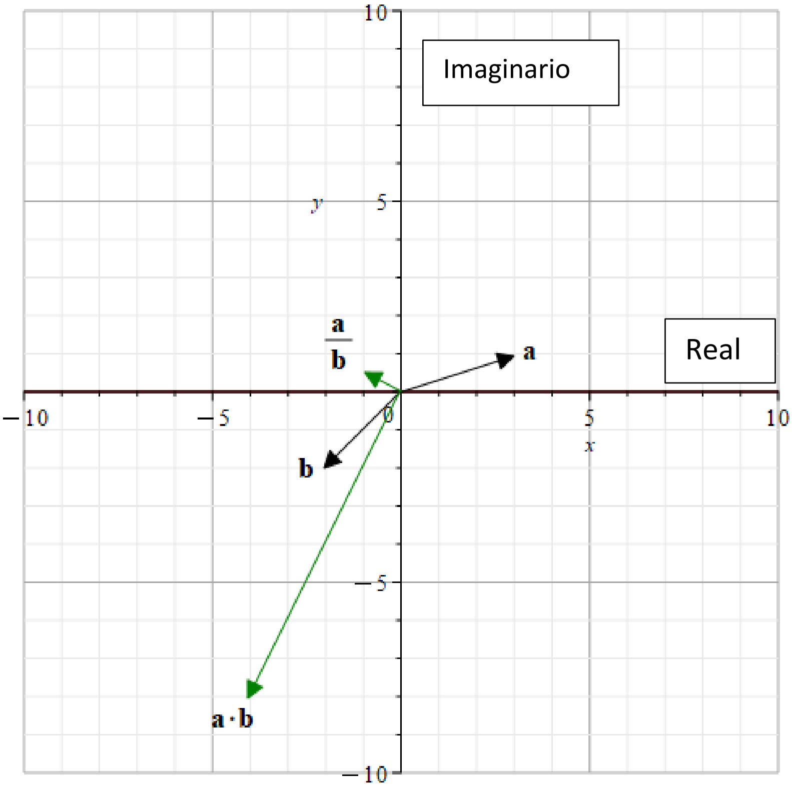
$b = 2.83\angle 225°$

Entonces

$a \cdot b = (3.16 \cdot 2.83)\angle(18.4 + 225) \approx 8.95\angle 243.4°$

$\frac{a}{b} = \left(\frac{3.16}{2.83}\right)\angle 18.4 - 225 \approx 1.12\angle - 206.6°$

O con ángulo positivo: $1.12 \angle 153.4°$



5.23

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + I\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z = 2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}}$

$z^3 = (2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}})(2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}})(2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}}) = 8\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}+I\cdot\frac{\pi}{3}+I\cdot\frac{\pi}{3}} = 8\cdot e^{I\cdot\pi}$

donde el módulo es 8 y el argumento es π, que puede escribirse

$z^3 = 8(\cos\pi + I\cdot\sin\pi) = 8(-1 + I\cdot 0) = -8 \quad \Leftrightarrow$

$z^3 = -8$ cual es la forma rectangular.

