WorldMathBook, Øvelser

Dansk

Grundlag + B +A PRØVESIDER

Indhold:

Forord 6

Del 1. Grundlag 8

Talsystem 8

De fire regningsarter 11

- *Sum, Differens, Produkt, Division*

Brøker 19

Procent 23

- *Procentpoint*

Bogstavregning 26

Parenteser 29

Kvadratsætningerne 32

Kvadratrod 34

Potensregning 36

Ligninger 42

Andengradsligninger 50

Andre ligninger med potenser 55

To ligninger med to ubekendte 57

Funktioner og proportionalitet 60

Intervaller og uligheder 61

Lidt om imaginære tal 65

Del 2. Koordinatsystemet i planen (2D) og funktioner 67

Koordinatsystemet og afstand 67

Den rette linje 73

Parablen 82

Potensfunktioner 90

Funktioner og de fire regningsarter 93

- *Sammensatte funktioner, Omvendte funktioner*

Den retvinklede trekant 97

Cirklen 101

Sinus, cosinus og tangens 104

Radian 112

- *Vinkel, Buelængde, Tabel*

Sinusfunktionen og sinussvingninger 117

Den skæve trekant 125

- *Beviser for sinusrelationen og cosinusrelationerne*

Eksponentialfunktioner 130

Logaritmefunktioner (log og ln) 136

- *10- tals logaritmen, Den naturlige logaritme*

Andre funktioner 144

- *Hyperblen, Tredjegradspolynomiet, Fjerdegradspolynomiet, Polynomiumsbrøk-funktion, Et specielt tredjegradspolynomium, Stykkevis definerede funktioner*

Del 3. Differentialregning og Integralregning 151

Indledning 151

Differentialregning 152

Beviser for differentialregning 1 156

- *Den vandrette linje, Den rette linje, Parablen, Kvadratrodsfunktionen, Potensfunktioner, Den naturlige eksponentialfunktion, Den naturlige logaritme*

Notation (skrivemåder) 168

Differentiation og de fire regningsarter 169

- *Sum, Differens, Produkt, Division*

Differentiation af sammensat funktion 173

Beviser for differentialregning 2 176

- *Beviser for differentiation af e^{kx}, Eksponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Cosinusfunktionen, Tangensfunktionen*
- *Oversigt*
- *Differentiabel – ikke-differentiabel*

Integralregning 193

- *Oversigt*

Notation (skrivemåder) 196

Integration og de fire regningsarter 199

- *Sum, Differens, Produkt*

Integration ved substitution 201

Partiel integration 204

Det bestemte integrale 207

Arealberegning 211

Volumenberegning 216

Guldins regler 221

Kurvelængde 223

Differentialligninger 225

- *Typiske differentialligninger, Den logistiske differentialligning*

Hældningsfelter 239

Funktioner af to variable 242

- *Funktionsudtryk, 3D figurer*
- *Gradienten*

Del 4. Vektorer 249

2D-vektorer i planen 249

- *Grundlag, Særlige vektorer, Regneregler, Vinkel, Projektion, Determinant, areal og vinkel, Linjens ligning på vektorform, Afstand punkt-linje*

Polære koordinater i 2D 271

Vektorfunktioner (parameterkurver) i 2D 272

- *Linjens vektorfunktion, Cirklens vektorfunktion, Differentiation af vektorfunktioner, Differentiation af linjens vektorfunktion, Differentiation af cirklens vektorfunktion, Dobbeltpunkter*

3D-vektorer i rummet 282

- *Afstand punkt-punkt, Krydsproduktet, Vinkel vektorer, Areal, Planens ligning, Afstand punkt-plan, Linjer i rummet, Afstand mellem vindskæve linjer, Afstand punkt-linje, Afstand mellem to parallelle planer, Vinklen v mellem to planer, Vinklen v mellem linje og plan*

Kuglens ligning 308

Del 5. Statistik og sandsynlighed 310

Statistik 310

Observationer 311

- *Ikke-grupperede observationer*
- *Grupperede observationer*
- *Normalfordeling, varians og spredning*
- *Chi i anden-test*

Regression 321

- *Lineær*
- *Potens*
- *Eksponentiel*

Sandsynlighedsregning og kombinatorik 324

- *Indledning, Teori, Eksempler*

Binomialfordeling, stikprøve og konfidensinterval 332

- *Binomialfordeling*
- *Stikprøve og konfidensinterval for en binomialfordeling*
- *Notation, fagudtryk og skrivemåder*

Tal og mængder 342

- *Naturlige tal, hele, rationale, irrationale, reelle, imaginære tal*
- ***Komplekse tal,*** *rektangulær form, polær form, eksponentiel form*
- *Komplekse tal, sammenfatning*
- *Lidt om mængder*

Sjældent anvendte beviser og beregninger 357

- *Bevis for Pythagoras læresætning*
- *Bevis for faktorisering af et andengrads-polynomium*
- *Polynomiers division*
- *Visning af formler for Permutation og Kombination*
- *Bevis for produkt og division af komplekse tal på polær og eksponentiel form*

Stikord 369

Forord

Matematik er vores mest præcise videnskab.

Matematik er en smuk videnskab.

Nogle studerer matematik alene, men de fleste bruger det som værktøj for fysik, biologi, medicin, ingeniørvidenskab, økonomi, ……, for alt.

Niveau B, A og mere. Starter med de fire regningsarter og slutter i starten af studiet til bachelor eller kandidat.

Sproget er klart, forståelse i fokus, fagord forklares.

Der er en øvelsessamling til denne bog: Øvelser, opgaver og løsninger.

Bogen er uafhængig af hvilken formelsamling der anvendes.

Bogen er også uafhængig af om der benyttes en lommeregner eller et regneprogram.

Og så lige en ting mere. Matematik bliver ikke sværere og sværere. Det er min personlige erfaring, og det ser jeg også hos de studerende. Man lærer mere, men det bliver ikke sværere.

Forfatter: Tom Pedersen, Maskin-procesingeniør og ph.d. fra Brunel University, London. Jeg har arbejdet i erhvervslivet som projektleder og rådgiver, - som forsker, og som underviser på ingeniørstudiet i flere fag (Ingeniørhøjskolen i Helsingør, Ingeniørhøjskolen i København, og Danmarks Tekniske Universitet (DTU)). Jeg har undervist meget i matematik, herunder alle emnerne i denne bog….. God fornøjelse!

Tom Pedersen, september 2025.

Procent

Procent betyder "ud af hundrede". Det vil sige en brøk hvor nævneren er 100.

$\frac{1}{2}$ betyder 1 ud af 2. Ved at gange med 50 i tæller og nævner får man $\frac{50}{100}$ eller 50 ud af 100 eller 50%. Skrevet kort:

$$\frac{50}{100} = 50\%$$

Eksempler

$$\frac{1}{5} = \frac{20 \cdot 1}{20 \cdot 5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{1}{8} = \frac{12{,}5 \cdot 1}{12{,}5 \cdot 8} = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

eller videre til kommatal

$$\frac{1}{2} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} = \frac{50}{100} = 50\% = 0{,}5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25 \cdot 1}{25 \cdot 4} = \frac{25}{100} = 25\% = 0{,}25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 4} = \frac{75}{100} = 75\% = 0{,}75$$

$$\frac{3}{8} = \frac{12{,}5 \cdot 3}{12{,}5 \cdot 8} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\% = 0{,}375$$

Procent er ud af 100. Kommatal er ud af 1.

1 er en hel. 100% er også en hel.

$$1 = \frac{100}{100} = 100\%$$

2.

I går kostede en bestemt bluse 200 kr. I dag er den steget til 225 kr. Hvad er stigningen i %?

200 kr. er udgangspunktet og svarer til 100%.

Stigningen er 225 - 200 = 25 kr. som skal ses i forhold til de 200 kr.:

$\frac{25}{200} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Svar: 12,5 %

3.

I går kostede en bestemt bluse 200 kr. I dag er den faldet til 175 kr. Hvad er prisfaldet i %?

200 kr. er udgangspunktet og svarer til 100%.

Faldet er 200 - 175 = 25 kr. som skal ses i forhold til de 200 kr.:

$\frac{25}{200} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Svar: 12,5 % **(**Man kunne skrive på et skilt: -12,5% på denne bluse.)

4.

Prisen på en boremaskine er 1000 kr. uden moms.

De 1000 kr. svarer til 100%. Med 25% moms bliver prisen:

$1{,}25 \cdot 1000 = 1250$ kr.

Svar: 1250 kr.

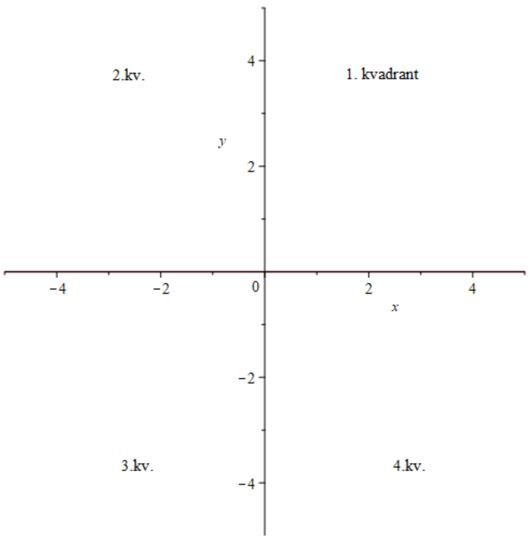
Del 2. Koordinatsystemet i planen (2D) og funktioner

Koordinatsystemet og afstand

Vi lever i en verden med tre dimensioner, vi kalder det rummet og det består af længde, bredde og højde.

Hvis vi nøjes med to dimensioner, kaldes det planen (nogle siger planet), og den består af to retninger, f.eks. vandret og lodret. Vi kan også kalde retningerne for akser. Så har vi førsteaksen og andenaksen, eller fagudtrykkene: *abcissen* og *ordinaten*, begge fra latin. Abcissen betyder ”ud (ab) herfra (cis)”. Man forestiller sig at stå i nulpunktet og se vandret ud herfra. Ordinaten betyder ”den almindelige”, dvs. lodret (alt andet end lodret vil jo være skævt og dermed ikke almindeligt).

I matematik kalder vi ofte akserne for x-aksen og y-aksen,



men de kan også hedde noget andet. I fysik kan 1.aksen f.eks. hedde t for tid, og 2.aksen v for hastighed (= *velox* eller *velocity*). I økonomi kan 1.aksen måske hedde måned og 2.aksen udgifter. Osv.

Akserne deler planen i fire dele, fire kvarte, som kaldes de fire kvadranter. Første kvadrant er den fjerdedel, hvor x og y er positive (begge +). Så roteres mod uret til 2. 3. og 4. kvadrant.

Akserne er vinkelret på hinanden og skærer hinanden i et fælles nulpunkt, skrevet sådan: $(x,y) = (0,0)$. Nulpunktet har også navnet Origo - ofte bare O.

På akserne vælger vi en skala, som passer til opgaven og som normalt inddeles på samme måde for de to akser. Det kommer dog an på opgaven. Hvis skalaerne er ens, siger vi, at de er ækvidistante, som betyder ”samme afstand”.

Samlet hedder det et koordinatsystem (ko: *sammen med*); (ordinat: *den almindelige*), og det benyttes alle steder.

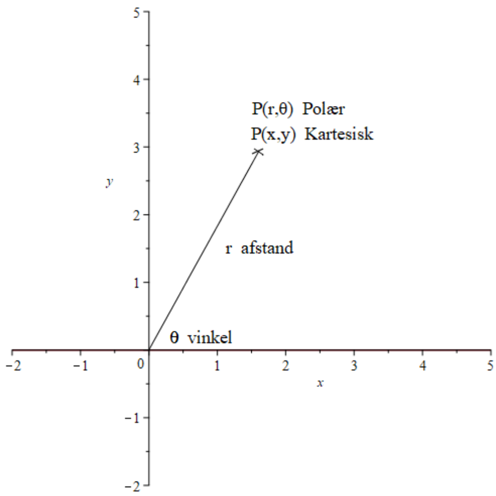
F.eks. benyttes koordinatsystemet til at vise, hvordan en funktion forløber: Den retlinede funktion, parabelfunktionen, sinusfunktionen, osv.

Vi ser x-værdien som udgangspunktet og y-værdien som deraf følger. En funktions x-værdier kaldes derfor også for *Definitionsmængden* (Dm), og y-værdierne kaldes for *Værdimængden* (Vm).

Kravet til en funktion er, at der til én x-værdi hører kun én y-værdi. En funktion tegnet i et koordinatsystem kan derfor ikke gå frem og tilbage i x-retningen, da det ville give flere y-værdier for én x-værdi. Har man brug for dét, taler vi om vektorfunktioner eller parameterfunktioner, som omtales i Del 4.

Det almindelige retvinklede koordinatsystem kaldes også for det kartesiske (engelsk: cartesian) koordinatsystem efter matematikeren Descartes.

Koordinater kan også angives som polære koordinater, hvor man beskriver (afstand fra Origo, vinkel med +x aksen). Se figur:



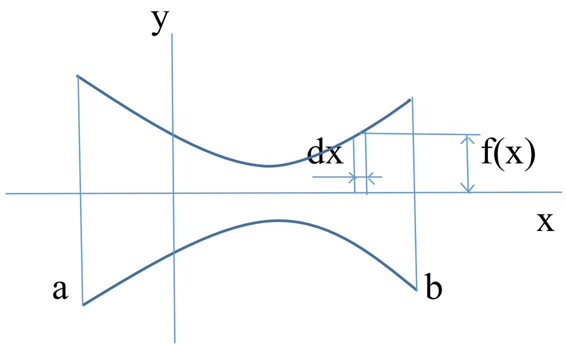
Vi vil beskrive polære koordinater lidt mere i slutningen af bogen.

Nu handler det om almindelige (Kartesiske) koordinater.

Volumenberegning

Vi kan rotere et 2D-areal om x eller y-aksen og få et 3D-volumen.

Formlen for rotation om x-aksen udledes således:



Hvis vi roterer vores uendeligt tynde strimmel om x-aksen, får vi en mikro cylinder. En makro cylinder har volumenet

$V = \pi \cdot r^2 \cdot l$ l for længde

For vores mikro cylinder bliver volumenet

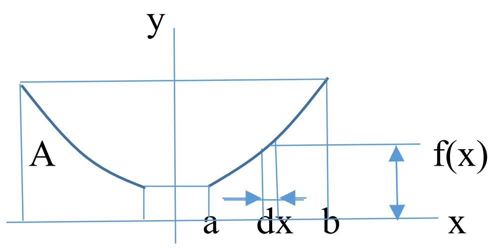
$dV = \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$

og når vi integrerer (samler alle mikro cylinderne) fra a til b

$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$ rotationsvolumen om x-akse

Volumenet kan altså beregnes, når vi har et udtryk for funktionen som jo fortæller, hvordan mikro-cylinderens radius varierer.

Formlen for rotation om y-aksen udledes således



Hvis vi roterer vores uendeligt tynde strimmel om y-aksen, får vi en mikro cylinderskal. Dens volumen bliver

dV = højde · omkreds · mikro-tykkelse =>

$dV \ = \ f(x) \cdot 2\pi x \cdot dx$ =>

og når vi integrerer (samler alle mikro cylinderskallerne) fra a til b

bliver volumenet regnet numerisk (x eller f(x) kan være negativ)

$V \ = \ \left| \ 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \ \right|$ rotationsvolumen om y-akse

I forhold til figuren vil rotationsvolumenet ligne rummet under tribunerne på et fodboldstadion.

Man kan også se på rotationsvolumenet som værende arealet A roteret om y-aksen.

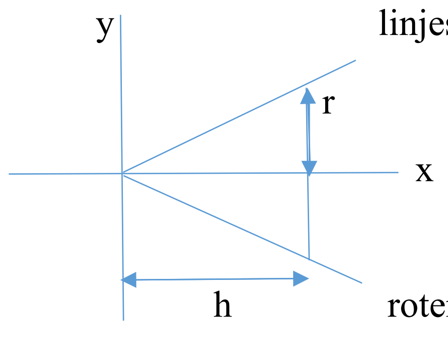
Hvis man sætter a = 0 får man et volumen uden hul i midten.

Eksempler

1.

Vi vil finde formlen for en kegles volumen.

Vi roterer et linjestykke en gang om x-aksen og får så en kegle, der ligger ned.



linjestykke: $f(x) \ = \ a \cdot x \ = \ \frac{r}{h} \cdot x$

roteret linjestykke

$V \ = \ \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\, dx$ =>

$V \ = \ \pi \cdot \int_0^h (\frac{r}{h} \cdot x)^2\, dx$ r og h er konstante ⇔

$V \ = \ \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int_0^h x^2\, dx$ ⇔

$V \ = \ \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$ ⇔

$V \ = \ \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{h^3}{3} - 0\right)$ ⇔

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ som er formlen for en kegles volumen

WorldMathBook, Øvelser

Dansk

Grundlag + B + A PRØVESIDER

Indhold:

Forord 6

Opgaver 8 – 114

Løsninger 115 – 371

Del 1. Grundlag

Sektion A – traditionelle opgaver 8

De fire regningsarter

Brøker

Procent og Procent point

Bogstavregning (algebra)

Parenteser, kvadratsætninger, kvadratrod

Potensregning

Ligninger

Andengradsligninger

Andre ligninger med potenser

To ligninger med to ubekendte

Funktioner og proportionalitet

Intervaller og uligheder

Sektion B – anvendt matematik 28

Del 2. Koordinatsystemet i planen (2D) og funktioner

Sektion A – traditionelle opgaver 32

Koordinatsystemet og afstand

Den rette linje

Parablen

Potensfunktioner

Funktioner og de fire regningsarter

- *Sammensatte funktioner, Omvendte funktioner*

Den retvinklede trekant

Cirklen

Sinus, cosinus og tangens

Radian

- *Vinkel, Buelængde*

Sinusfunktionen og sinussvingninger

Den skæve trekant

Eksponentialfunktioner og
Note om eksponentialfunktioner på forskellige former 46

Logaritme funktioner (log og ln)

Andre funktioner

Sektion B – anvendt matematik 53

Del 3.

Differentialregning og Integralregning

Sektion A – traditionelle opgaver 61

Differentialregning

Differentialregning og de fire regningsarter

Differentiation af sammensatte funktioner

Integral regning

Integration og de fire regningsarter

Integration ved substitution

Partiel integration

Det bestemte integrale

Arealer

Volumener

Guldin's regler

Kurve længde

Differentialligninger

- *Typiske differentialligninger, Den logitiske differentialligning*

Hældningsfelter

Funktioner af to variable

- *Gradienten*

Sektion B – anvendt matematik 82

Del 4. Vektorer

Sektion A – traditionelle opgaver 90

2D-vektorer I planen

- *Grundlag, Særlige vektorer, Regneregler, Vinkel, Projektion, Determinant, Areal og vinkel, Linjens ligning på vektor form, Afstand punkt-linje*

Polære koordinater i 2D

Vektor funktioner (parameter kurver) in 2D

- *Linjens vektorfunktion, Cirklens vektorfunktion, Differentiation af vektorfunktioner, Dobbelt punkter*

3D vektorer i rummet

- *Afstand punkt-punkt, krydsprodukt, Vinkel mellem vektorer, Areal, Planens ligning, Afstand punkt-plan, Linjer I rummet, Afstand mellem vindskæve linjer, Afstand punkt-linje, Afstand mellem to parallelle planer, Vinkel mellem to planer, Vinkel mellem linje og plan*

Kuglen

Sektion B – anvendt matematik 106

Del 5. Statistik og sandsynlighed 110

Statistik. Data (Observationer, fordeling, afvigelse)

Regression

Sandsynlighedsregning

Komplekse tal 118

Del 1.

Sektion A – løsningsforslag 119

Sektion B – løsningsforslag 166

Del 2.

Sektion A – løsningsforslag 172

Sektion B – løsningsforslag 229

Del 3.

Sektion A – løsningsforslag 243

Sektion B – løsningsforslag 307

Del 4.

Sektion A – løsningsforslag 322

Sektion B – løsningsforslag 360

Del 5. Løsningsforslag 370

Forord

Denne bog er øvebog for teoribogen med opgaver og løsningsforslag i fem dele svarende til de fem dele i teoribogen.

Først præsenteres fem dele med opgaver, dernæst fem dele med forslag til løsninger.

For hver del er der først traditionelle opgaver, som er nummereret for eksempel: 1A.001, som betyder Del 1, Sektion A, opgave 001.

Dernæst er der opgaver i anvendt matematik indenfor fysik, kemi, medicin, biologi, økonomi og ingeniør videnskab. Disse opgaver er nummereret for eksempel: 2B.02, som betyder Del 2, Sektion B, opgave 02.

Nogle af opgaverne i B sektionerne er lidt vanskeligere.

Bogen tænkes anvendt som

- *Din matematik-øvelser følgesvend fra ca. 9.klasse til et stykke op i studiet med særlig vægt på stx og tilsvarende samt det første studieår*
- *Øvelse/opgave bog for stx og tilsvarende samt det første studieår.*
- *Øvelse/opgave bog der suppleres med en formelsamling og et CAS værktøj. Lommeregnere, regneprogrammer, osv. kaldes CAS (Computer Aided Solve) i denne bog.*

Kravene til lommeregner/program er:
Del 1. Alle lommeregnere/programmer.
Del 2. Lommeregner/program med funktioner - det har næsten alle.
Del 3. Avanceret lommeregner/program der kan differentiere og integrere og som kan vise diagrammer.
Del 4. Selve opsætningen af vektorer i Del 4 løses ikke med fordel med lommeregner/program, men i fald, skal det være en avanceret lommeregner/program. Og til de ”almindelige” beregninger kan en almindelig lommeregner/program anvendes.
Del 5. Avanceret lommeregner/program til regression.

Forfatter: Tom Pedersen, Maskin-procesingeniør, Ph.D. fra Brunel University, London. Jeg har arbejdet i erhvervslivet som projektleder og rådgiver – som forsker og underviser på ingeniørstudiet i flere fag (Ingeniørhøjskolen i Helsingør, Ingeniørhøjskolen i København og Danmarks Tekniske Universitet (DTU)). Jeg har undervist meget i matematik, herunder alle emnerne i denne bog.

Skønt noget kommer gennem hårdt arbejde, håber jeg, at du vil synes om det.
Matematik er spændende og kan meget.

Tom Pedersen, september 2025.

Opgaver

4A.052

Find både den spidse og den stumpe vinkel mellem planerne

α: $2x - 3y + z = 8$ $\qquad\qquad$ β: $2x + y - 4z = -8$

4A.053

Find afstanden fra punkt P(3, 7, 2) to planen

α: $3(x-1) + 2(y+5) - 2(z-2) = 0$

2B.09

Jorden har en omkreds på 40 000 km langs en længdegrad - og er næsten helt rund. Vi står på stranden med vores øjne 2 m over havniveau og ser mod horisonten. Hvor langt væk ser vi horisonten?

Hvor langt væk ser vi horisonten hvis vi er 40 m, 100 m, 1000 m, over havet?

Løsningsforslag

4A.052

Vinklen mellem planerne er lig med vinklen mellem deres normalvektorer:

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{14} \quad \text{og} \quad |\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{21}$$

Formel $\qquad cos\ v = \frac{\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\beta}{|\boldsymbol{n}_\alpha| \cdot |\boldsymbol{n}_\beta|}$

Her $\qquad cos\ v = \frac{-3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \quad \Rightarrow \quad v \approx 100°$ den stumpe vinkel

Og $\qquad u \approx 180 - 100 \approx 80°$ den spidse vinkel

4A.053

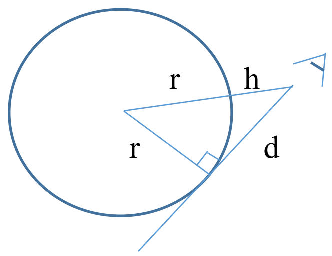
$3x - 3 + 2y + 10 - 2z + 4 = 0$ og punkt (3, 7, 2) $\quad$ =>

$$dist. = \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + (-2) \cdot 2 + 11|}{(9+4+4)^{½}} = \frac{30}{\sqrt{17}} \approx 7.28$$

2B.09

Vi finder jordens radius:

$$O = 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{O}{2\pi} = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6378\ km \approx 6\,378\,000\ m$$



Pythagoras:

$$d^2 + r^2 = (r+h)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$d^2 = (r+h)^2 - r^2$$

h = 2 m:

$$d^2 = 6\,378\,002^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 5051\ m \approx 5\ km$$

h = 40 m:

$$d^2 = 6\,378\,040^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 22\,589\ m \approx 23\ km$$

h = 100 m:

$$d^2 = 6\,378\,100^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 35\,716\ m \approx 36\ km$$

h = 1000 m:

$$d^2 = 6\,379\,000^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 112\,947\ m \approx 113\ km$$